

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122

Måndag 2020-12-14 kl 14:00-19:00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Fullständiga lösningar ska ges på samtliga problem
OBS: skriv endast på inlämningssidornas framsidor

Hjälpmedel Miniräknare

Examinator Mats Wallin tel 073 765 2000

1. Uppskatta temperaturökningen i träffytan vid en örfil, dvs ett hårt slag på kinden med en öppen hand.

2. Använd dimensionsanalys för att bestämma tryckskillnaden inuti och utanför en såpbubbla med radie R och ytspänningen σ . Ytspänning är arbetet per areaenhet för att öka arean.

3. 1.00 kg kvävgas (N_2) värms upp så att temperaturen ökar från $-20.0\text{ }^\circ\text{C}$ till $100.0\text{ }^\circ\text{C}$. Använd $c_V = 20.8\text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$. Bestäm hur mycket värme som tillförs, ökningen i inre energi, samt det yttre arbetet på systemet om processen sker vid

(a) konstant volym.

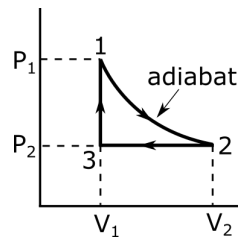
(b) konstant tryck.

4. En sfärisk svartkropp med radie r har temperaturen T . Svartkroppen omsluts av ett sfäriskt skal med radie $R > r$ och temperatur T_1 , som är svart både på in och utsidan och strålar som en svartkropp. Omgivningen har temperaturen T_0 . Bestäm ett uttryck för T_1 uttryckt i T och T_0 .

5. En apelsin hänger i ett apelsinträd. Luftens temperatur sjunker plötsligt från $25\text{ }^\circ\text{C}$ till $15\text{ }^\circ\text{C}$ vid tiden $t = 0$. Apelsinens temperatur vid $t = 0$ är $25\text{ }^\circ\text{C}$. Apelsinen har diameter 6.0 cm, densitet $850\text{ kg}/\text{m}^3$, värmekapacitet $c = 3770\text{ J}/\text{kg}\cdot\text{K}$ och den konvektiva värmeöverföringskoefficienten är $\alpha = 1.5\text{ W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$. Bestäm avsvlningshastigheten dT/dt vid tiden $t = 0$. Svaret ska ges i enheten kelvin per timma.

6. Enligt Big Bang-teorin för universums utveckling kallnar strålning i universum när universum expanderar adiabatiskt. Strålningstrycket uppfyller $p = U/(3V)$ där U är inre energin och V universums volym. Antag att universum strålar som en svartkropp. Härled sambandet mellan temperaturen T och universums radie R . Svaret kan innehålla en okänd konstant.

7. I en värmemaskin genomgår en ideal gas en cyklisk process enligt figuren nedan. Beräkna verkningsgraden uttryckt i kvantiteterna $P_1, P_2, V_1, V_2, \gamma = C_P/C_V$. Förenkla svaret så långt som möjligt.



8. En värmemaskin arbetar mellan två reservoarer 1, 2 som båda har samma temperaturoberoende värmekapacitet. Reservoirerna har initialtemperaturer T_1, T_2 där $T_1 > T_2$. Värmemaskinen arbetar tills båda reservoirerna har uppnått samma sluttemperatur T_3 . Bestäm det maximala värdet på det totala arbete som maskinen kan utföra (dvs inte arbetet per cykel utan totala arbetet under tiden som maskinen arbetar). Förenkla så långt som möjligt.

LYCKA TILL!

FORMELBLAD I TERMODYNAMIK

Tyngdaccelerationen	$g = 9.8 \text{ m/s}^2$
Absoluta nollpunkten	$0 \text{ K} = -273.16 \text{ }^\circ\text{C}$
Boltzmanns konstant	$k = 1.380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Gaskonstanten	$R = 8.314 \text{ J/(K mol)}$
Plancks konstant	$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Ljushastigheten	$c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Avogadros konstant	$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$
Atomära massenheten	$u = 1.660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Atommassor m/u	H: 1, He: 4, C: 12, N: 14, O: 16, Ar: 40
Luft	ca 80% N ₂ och 20% O ₂
Atmosfärstryck	$1 \text{ atm} = 101 \text{ kPa}$
Stefan-Boltzmanns konstant	$\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$
Solarkonstanten	$\varphi = 1.4 \text{ kW/m}^2$
Värmekapacitet för vatten vid 15°C	$c = 4.19 \text{ kJ/K kg}$
Förångningsentalpi vatten 100°C, 1 atm	2260 kJ/kg
Värmekapacitet för is vid -4 °C	$c = 2.2 \text{ kJ/K kg}$
Smältentalpi för is	333 kJ/kg
Pris för hushållsel inklusive skatt	1 kr/kWh
Människa effekt: vila/promenad/löpning	$1/2/5 \text{ W/kg}$
Cirkelns omkrets och area	$2\pi R$ och πR^2
Sfärens area och volym	$4\pi R^2$ och $4\pi R^3/3$
Logaritmer	$\ln ab = \ln a + \ln b, \ln a/b = \ln a - \ln b$ $d \ln x / dx = 1/x, \int 1/x dx = \ln x$
Kinetisk energi	$E_K = U = (1/2)mv^2$
Gravitationell potentiell energi	$E_P = mgh, g = 9.8 \text{ m/s}^2$
Tryck	$P = F/A$
Arbete	$dW = -PdV$
Ideal gas	$PV = NkT = nRT$
Monoatomär ideal gas	$U = (3/2)NkT$
Diatomär ideal gas	$U = (5/2)NkT$
Van der Waals tillståndsekvation	$P = NkT/(V - Nb) - a(N/V)^2$
Van der Waals tillståndsekvation	$(P + a_0/v^2)(v - b_0) = RT, a_0 = aN_A^2, b_0 = bN_A$
Isoterm kompressibilitet	$\kappa = -(1/V)(\partial V/\partial P)_T$
Isobar volymutvidgningskoefficient	$\alpha_V = (1/V)(\partial V/\partial T)_P$
Boltzmannfördelningen	$n_i = \text{konstant} \cdot \exp(-E_i/kT)$
Maxwell-Boltzmanns hastighetsfördelning	$f^3(v) = 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2}v^2 \exp(-mv^2/2kT)$
MB fördelning av hastighetskomponent	$f^1(v_x) = \sqrt{m/2\pi kT} \exp(-mv_x^2/2kT)$
Medelhastighet	$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/m\pi}$
Medelkvadrathastighet	$\langle v^2 \rangle = 3kT/m$
Mest sannolika hastighet	$v_p = \sqrt{2kT/m}$
Kollisionstid	$\tau = 1/(n\pi d^2\sqrt{2}\langle v \rangle)$
Medelfri väg	$l = \langle v \rangle \tau = 1/(n\pi d^2\sqrt{2})$
Stöttal	$n^* = P/\sqrt{2\pi mkT}$
Värmefflöde	$\Phi = \Delta Q/\Delta t$
Värmefflödestäthet	$\varphi = \Phi/A = u(T)c/4$
Plancks strålningslag	$u(f, T) = (8\pi hf^3/c^3)/[\exp(hf/kT) - 1]$
Wiens förskjutningslag	$hf_{\max}/kT = 2.821, T\lambda_{\max} = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
Stefan-Boltzmanns lag	$\varphi = \sigma T^4$

Fouriers lag	$\Phi = -\lambda A \Delta T / \Delta x$
Värmeöverföring	$\Phi = \alpha A (T_1 - T_2)$
U-värde	$\Phi = U A \Delta T, 1/U = 1/\alpha + \Delta x/\lambda$
Första huvudsatsen	$dU = dQ + dW$
Isokor värmekapacitet	$C_V = (\partial Q / \partial T)_V = (\partial U / \partial T)_V$
Isobar värmekapacitet	$C_P = (\partial Q / \partial T)_P = (\partial H / \partial T)_P$
En mol ideal gas	$c_P = c_V + R$
Adiabat	$PV^\gamma = \text{konstant}, \gamma = C_P / C_V$
Adiabat	$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}, TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{konstant}$
Adiabatiskt arbete	$W = (P_2 V_2 - P_1 V_1) / (\gamma - 1)$
Carnotprocess	$Q_1 / Q_2 = T_1 / T_2$
Verkningsgrad värmemaskin	$\eta = W / Q_1$
Kylfaktor	$\varepsilon = Q_2 / W$
Värmefaktor	$\varepsilon_v = Q_1 / W$
Entropi	$S = k \ln \Omega$
Kvasistatisk värmeöverföring	$dQ = T dS$
Entalpi	$H = U + PV$
Helmholtz fria energi	$F = U - TS$
Gibbs fria energi	$G = U - TS + PV$

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122 201214

LÖSNINGSSKISSER

1. Uppskatta temperaturökningen i träffytan vid en örfil, dvs ett hårt slag på kinden med en öppen hand.

Antaganden: Handens massa $M = 1$ kg. Massan hos vävnad som tar upp slaget $m = 0.2$ kg. Vävnadens värmekapacitet uppskattas som vattens värde: $c = 4$ kJ/K·kg. Slagets hastighet bestämmer den som slår och ett brett intervall av värden är rimliga och accepteras. Prova några olika värden: $v = 10$ och $v = 30$ m/s. Antag att halva kinetiska energin i slaget omvandlas till värme i kinden. Detta ger:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M v^2 = Q = mc\Delta T$$

$v = 10$ m/s ger

$$\Delta T = \frac{Mv^2}{4mc} = \frac{1 \cdot 10^2}{4 \cdot 0.2 \cdot 4000} = 0.031 \text{ K}$$

$v = 30$ m/s ger $\Delta T = 3^2 \cdot 0.031 = 0.28 \text{ K}$.

SVAR: $\Delta T \approx 0.03 - 0.3 \text{ K}$

2. Använd dimensionsanalys för att bestämma tryckskillnaden inuti och utanför en såpbubbla med radie R och ytspänningen σ . Ytspänning är arbetet per areaenhet för att öka arean.

Definitionen av ytspänning som arbetet per areaenhet ger dimensionen

$$[\sigma] = [W/A] = [D]L/L^2 = [F]/L$$

Ansats $\Delta P = f\sigma^a R^b$. Dimensionsanalys

$$[\Delta P] = [F]/[A] = [F]L^{-2} = [\sigma]^a [R]^b = [F]^a L^{-a} L^b$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -1$$

SVAR: $\Delta P = f\sigma/R$ där f är en dimensionslös konstant vars värde inte ges av dimensionsanalys.

Kommentar: Man kan enkelt visa att $f = 4$ i detta problem. Eftersom en bubbla till skillnad från en droppe har två ytor (en inre, en yttre) blir

$$\begin{aligned} dU &= 2\sigma dA = 2\sigma d(4\pi R^2) = 16\pi\sigma R dR \\ &= dW = F dR = (\Delta P A) dR = 4\pi R^2 \Delta P dR \\ &\Rightarrow \Delta P = 4\sigma/R \end{aligned}$$

För en droppe (en yta) blir $dU = \sigma dA$ och $\Delta P = 2\sigma/R$.

3. 1.00 kg kvävgas (N_2) värms upp så att temperaturen ökar från $-20.0\text{ }^\circ\text{C}$ till $100.0\text{ }^\circ\text{C}$. Använd $c_V = 20.8\text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$. Bestäm hur mycket värme som tillförs, ökningen i inre energi, samt det yttre arbetet på systemet om processen sker vid

(a) konstant volym.

(b) konstant tryck.

(a) Molvikten är 28 g/mol vilket ger tillförd värme

$$\Delta Q = n c_V \Delta T = \frac{1000}{28} \cdot 20.8 \cdot 120 = 89\text{ kJ}$$

Yttre arbetet vid konstant volym är $\Delta W = 0$. Ändringen i inre energi för $\Delta W = 0$ är

$$\Delta U = \Delta Q = 89\text{ kJ}$$

SVAR: $\Delta Q = \Delta U = 89\text{ kJ}$, $\Delta W = 0$

(b) Tillförd värme

$$\Delta Q = n c_P \Delta T = n(c_V + R)\Delta T = \frac{1000}{28}(20.8 + 8.314) \cdot 120 = 124\text{ kJ}$$

Ändringen i inre energi blir samma som i (a) eftersom U bara beror på T :

$$\Delta U = n c_V \Delta T = 89\text{ kJ}$$

Yttre arbetet på systemet blir

$$\Delta W = \Delta U - \Delta Q = -36\text{ kJ}$$

Tolkning av minustecknet: värme tillförs varpå gasen utför ett positivt arbete på omgivningen.

SVAR: $\Delta Q = 124\text{ kJ}$, $\Delta U = 89\text{ kJ}$, $\Delta W = -36\text{ J}$

4. En sfärisk svartkropp med radie r har temperaturen T . Svartkroppen omsluts av ett sfäriskt skal med radie $R > r$ och temperatur T_1 , som är svart både på in och utsidan och strålar som en svartkropp. Omgivningen har temperaturen T_0 . Bestäm ett uttryck för T_1 uttryckt i T och T_0 .

Nettovärmeffödet från svartkroppen är

$$\Phi = A_r \sigma (T^4 - T_1^4) = 4\pi r^2 \sigma (T^4 - T_1^4)$$

Det utåtriktade flödet från skalet är

$$\Phi_1 = A_R \sigma (T_1^4 - T_0^4) = 4\pi R^2 \sigma (T_1^4 - T_0^4)$$

Vid steady state är dessa flöden lika, $\Phi = \Phi_1$, vilket ger

$$r^2(T^4 - T_1^4) = R^2(T_1^4 - T_0^4)$$

$$(R^2 + r^2)T_1^4 = R^2T_0^4 + r^2T^4$$

SVAR:

$$T_1 = \left(\frac{R^2T_0^4 + r^2T^4}{R^2 + r^2} \right)^{1/4}$$

5. En apelsin hänger i ett apelsinträd. Luftens temperatur sjunker plötsligt från 25 °C till 15 °C vid tiden $t = 0$. Apelsinens temperatur vid $t = 0$ är 25 °C. Apelsinen har diameter 6.0 cm, densitet 850 kg/m³, värmekapacitet $c = 3770$ J/kg·K och den konvektiva värmeöverföringskoefficienten är $\alpha = 1.5$ W/m²·K. Bestäm avsvlningshastigheten dT/dt vid tiden $t = 0$. Svaret ska ges i enheten kelvin per timma.

Detta problem handlar om Newtons avsvlningslag. Apelsinens area är $A = 4\pi R^2$, volym $V = (4/3)4\pi R^3$, och massa $M = (4/3)4\pi R^3\rho$ där ρ är densiteten. Apelsinens totala värmekapacitet är $C = Mc$. För apelsinen är $C = C_V = C_P$ inom noggrannheten i problemet.

Värmeöverföringshastigheten från apelsinen fås med

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = [dQ = CdT] = C\frac{dT}{dt} = \alpha A\Delta T$$

Detta ger avsvlningshastigheten

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{\alpha A}{C}\Delta T = \frac{\alpha \cdot 4\pi R^2}{(4/3)\pi R^3\rho c}\Delta T = \frac{\alpha}{(1/3)R\rho c}\Delta T = \frac{1.5}{(1/3) \cdot 0.030 \cdot 850 \cdot 3770} \cdot (-10) \\ &= -4.7 \cdot 10^{-4} \text{ K/s} \cdot 3600 \text{ s/h} = -1.7 \text{ K/h}\end{aligned}$$

SVAR: Initialt är $dQ/dt = -1.7$ K/h

6. Enligt Big Bang-teorin för universums utveckling kallnar strålning i universum när universum expanderar adiabatiskt. Strålningstrycket uppfyller $p = U/(3V)$ där U är inre energin och V universums volym. Antag att universum strålar som en svartkropp. Härled sambandet mellan temperaturen T och universums radie R . Svaret kan innehålla en okänd konstant.

Vid sfärisk expansion är volym och radie relaterade som

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 \propto R^3$$

Antag att expansionen kan behandlas som en kvasistatisk process. Då blir

$$dU = TdS - pdV$$

Med det adiabatiska villkoret $dS = 0$, dvs värme tillförs eller bortförs inte, och strålningstrycket $p = U/(3V)$ blir

$$\frac{dU}{U} = -\frac{pdV}{U} = -\frac{dV}{3V}$$

Lösningen är

$$U \propto V^{-1/3} \propto 1/R$$

Antag vidare att universum är en svartkropp med energitäthet

$$u = \frac{U}{V} = aT^4$$

där $a = (\pi^2/15)k^4/(\hbar c)^3$. Detta ger

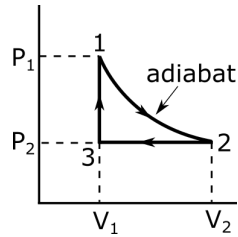
$$u \propto T^4 \propto \frac{1/R}{R^3} \propto \frac{1}{R^4}$$

dvs

$$T \propto 1/R$$

SVAR: $RT = \text{konstant}$.

7. I en värmemaskin genomgår en ideal gas en cyklisk process enligt figuren nedan. Beräkna verkningsgraden uttryckt i kvantiteterna $P_1, P_2, V_1, V_2, \gamma = C_P/C_V$. Förenkla svaret så långt som möjligt.



Verkningsgraden är

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{Q_{\text{ut}}}{Q_{\text{in}}}$$

Beräkna värmeöverföringarna.

Uppvärmning under 3-1:

$$\Delta Q_{\text{in}} = C_V(T_1 - T_3)$$

Avkylning under 2-3:

$$\Delta Q_{\text{ut}} = C_P(T_2 - T_3)$$

Detta ger

$$\eta = 1 - \frac{C_P}{C_V} \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_3} = 1 - \gamma \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_3}$$

Skriv om mha $PV = NkT$:

$$\eta = 1 - \gamma \frac{P_2 V_2 - P_2 V_1}{P_1 V_1 - P_2 V_1} = 1 - \gamma \frac{V_2/V_1 - 1}{P_1/P_2 - 1}$$

SVAR:

$$\eta = 1 - \gamma \frac{V_2/V_1 - 1}{P_1/P_2 - 1}$$

8. En värmemaskin arbetar mellan två reservoarer 1, 2 som båda har samma temperaturoberoende värmekapacitet. Reservoirerna har initialtemperaturer T_1, T_2 där $T_1 > T_2$. Värmemaskinen arbetar tills båda reservoirerna har uppnått samma sluttemperatur T_3 . Bestäm det maximala värdet på det totala arbete som maskinen kan utföra (dvs inte arbetet per cykel utan totala arbetet under tiden som maskinen arbetar). Förenkla så långt som möjligt.

Bestäm först entropiökningen hos det totala systemet för en cykel:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_3} \frac{CdT}{T} + \int_{T_2}^{T_3} \frac{CdT}{T} = C \ln \frac{T_3}{T_1} + C \ln \frac{T_3}{T_2} = C \ln \frac{T_3^2}{T_1 T_2} \geq 0$$

där $C_1 = C_2 = C$ är värmekapaciteten hos reservoirerna. Detta ger $T_3^2 \geq T_1 T_2$ och $T_3 \geq \sqrt{T_1 T_2}$ med likhetstecken för en reversibel maskin. Värmeöverföring från reservoar 1 till maskinen:

$$\Delta Q_1 = - \int_{T_1}^{T_3} CdT = C(T_1 - T_3)$$

med minustecken eftersom värme tas från reservoiren. Värmeöverföring från maskinen till reservoar 2:

$$\Delta Q_2 = \int_{T_2}^{T_3} CdT = C(T_3 - T_2)$$

Utfört arbete av värmemaskinen är

$$\Delta W = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 = C(T_1 - T_3) + C(T_3 - T_2) = C(T_1 + T_2 - 2T_3)$$

Maximalt arbete får man med en reversibel värmemaskin dvs med $\Delta S = 0$ vilket fås med $T_3 = \sqrt{T_1 T_2}$. Maximala arbetet blir

$$\Delta W_{\max} = C(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}) = C(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2$$

SVAR: $\Delta W_{\max} = C(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2$