



**Lösningsförslag till tentamen
Fredagen den 17 april 2020**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Givet matrisen

$$A_h = \begin{bmatrix} 3 & 19 & 3h+2 \\ 1 & 5 & h \\ 7 & 39 & 8h-3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm alla $h \in \mathbb{R}$ för vilka avbildningen $T_{A_h}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto A_h \mathbf{x}$ är inverterbar.

(4 p)

Lösningsförslag. Avbildningen T_{A_h} är inverterbar om och endast om matrisen A_h är inverterbar. Vi använda Gausseliminering på matrisen A_h :

$$\begin{bmatrix} 3 & 19 & 3h+2 \\ 1 & 5 & h \\ 7 & 39 & 8h-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & h \\ 3 & 19 & 3h+2 \\ 7 & 39 & 8h-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & h \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & h-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & h \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & h-5 \end{bmatrix}.$$

Enligt karakteriseringen av inverterbara matriser är A inverterbar om och endast om A har ett pivotelement (ledande etta) i varje rad och varje kolonn. Det gäller om och endast då $h-5 \neq 0$, dvs då $h \neq 5$. $\square$

Svar. Avbildningen T_{A_h} är inverterbar då $h \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 4 & -7 & -10 & -3 \\ -4 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas till kolonnrummet $\text{Col}A$ av A och en bas till nollrummet $\text{Nul}A^T$ av A^T .

(4 p)

Lösningsförslag. Vi betraktar den associerade totalmatrisen av A och använder Gausseliminerings:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -7 & -10 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & -8 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I den reducerade trappstegsmatrisen finns två pivotpositioner, nämligen i den första och i den andra kolonnen. Alltså bildar den första och den andra kolonnen i A ,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix},$$

en bas av kolonnrummet $\text{Col}A$. Vidare har vi att $\text{Nul}A^T = \text{Col}A^\perp$ och speciellt gäller att $\dim \text{Nul}A^T = 3 - \dim \text{Col}A = 3 - 2 = 1$. Alltså bildar kryssprodukten

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som är ortogonal till båda basvektorerna för $\text{Col}A$ en bas av $\text{Nul}A^T$. □

Svar. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för $\text{Col}A$ och $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -28 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för $\text{Nul}A^T$.

3. Låt

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

vara hörnen av en parallelogram Π i $\mathbb{R}^3$. Bestäm arean av Π .

(4 p)

Lösningsförslag. Vi observerar att

$$P_2 + P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = P_4$$

Alltså spänns Π upp av P_2 och P_3 (betraktade som vektorer). Arean är därmed lika med beloppet av kryssprodukten av P_2 och P_3 , dvs

$$\|P_2 \times P_3\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{30}$$

□

Svar. Arean av Π är $\sqrt{30}$ areaenheter.

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en diagonalmatris D och en inverterbar matris P sådana att $D = P^{-1}AP$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Egenvärdena av en undertriangulär matris är lika med diagonalelementen. Alltså har A egenvärdena 1, 2 och 4. Motsvarande egenvektorer ges av nollrummen av matriserna $A - I_n$, $A - 2I_n$ och $A - 4I_n$. Gausseliminationen ger

$$A - I_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - 2I_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - 4I_n = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket visar att

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{respektive} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är egenvektorer. Om vi sätter dessa egenvektorer som kolonnerna av en matris P , alltså

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

och låt D vara diagonalmatrisen med motsvarande egenvärdena på diagonalen, alltså

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

då uppfyller P och D ekvationen $D = P^{-1}AP$. □

Svar. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ger att $P^{-1}AP = D$.

5. Låt

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vara vektorer i $\mathbb{R}^4$. Låt $W = \text{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ vara det linjära höljat av $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$. Bestäm den ortogonala projektionen

$$\text{proj}_W(\mathbf{v}).$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vi använder Gram-Schmidts metod för ortogonalisering och erhåller en ortogonal bas $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ för W :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1,$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi använder den ortogonala basen för W för att beräkna projektionen av $\mathbf{v}$ på W och får

$$\text{proj}_W(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} \mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle} \mathbf{u}_2 = 2/2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4/5 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 7/5 \\ 4/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

□

$$\text{Svar. } \text{proj}_W(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 7/5 \\ 4/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$.

(a) Visa att $T_{\mathbf{v}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{x}$ är en linjär avbildning.

(2 p)

(b) Bestäm $A_{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sådan att $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = A_{\mathbf{v}}\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(2 p)

Lösningsförslag.

(a) För all vektorer $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$ in $\mathbb{R}^3$ och alla skalärer $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2(x_3 + y_3) - v_3(x_2 + y_2) \\ v_3(x_1 + y_1) - v_1(x_3 + y_3) \\ v_1(x_2 + y_2) - v_2(x_1 + y_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (v_2x_3 - v_3x_2) + (v_2y_3 - v_3y_2) \\ (v_3x_1 - v_1x_3) + (v_3y_1 - v_1y_3) \\ (v_1x_2 - v_2x_1) + (v_1y_2 - v_2y_1) \end{bmatrix} = \mathbf{v} \times \mathbf{x} + \mathbf{v} \times \mathbf{y} \\ &= T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + T_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}). \\ T_{\mathbf{v}}(c\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ cx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2(cx_3) - v_3(cx_2) \\ v_3(cx_1) - v_1(cx_3) \\ v_1(cx_2) - v_2(cx_1) \end{bmatrix} \\ &= c \begin{bmatrix} (v_2x_3 - v_3x_2) \\ (v_3x_1 - v_1x_3) \\ (v_1x_2 - v_2x_1) \end{bmatrix} = c(\mathbf{v} \times \mathbf{x}) \\ &= cT_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Alltså är $T_{\mathbf{v}}$ en linjär avbildning för alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

(b) För all $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (v_2x_3 - v_3x_2) \\ (v_3x_1 - v_1x_3) \\ (v_1x_2 - v_2x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

alltså uppfyller

$$A_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

kravet.

□

7. Låt V vara ett vektorrum med inre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ och låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vara en bas av V . Låt $A = (a_{ij})$ vara matrisen definierad som

$$a_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle.$$

Visa att det finns en matris P och en diagonalmatris D med positiva tal på diagonalen så att $D = P^T A P$.

(4 p)

Lösningsförslag. Matrisen A är symmetrisk eftersom för alla i, j

$$a_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = a_{ji}$$

enligt egenskaperna för inre produkter. Därmed är matrisen A ortogonalt diagonaliserbar och det finns en ortonormal bas $\mathcal{C} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ av egenvektorer med avseende på skalär produkten i $\mathbb{R}^n$. Låt $d_1, \dots, d_n$ vara motsvarande egenvärden. Då får vi att $D = P^T A P$ när vi sätter

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad P = [\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_n].$$

Speciellt gäller att $d_i = \mathbf{w}_i^T A \mathbf{w}_i$ för alla i . Det återstår att visa att alla egenvärden är positiva. För alla vektorer $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$ gäller att

$$\mathbf{z}^T A \mathbf{z} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} z_i z_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle z_i z_j = \left\langle \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n z_j \mathbf{v}_j \right\rangle$$

där vi har använt linjariteten hos den inre produkten i båda komponenterna. Låt $\mathbf{u}_i$ vara vektorn som uppfyller att $[\mathbf{u}_i]_{\mathcal{B}} = \mathbf{w}_i$. Då är $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ och

$$d_i = \mathbf{w}_i^T A \mathbf{w}_i = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle > 0$$

enligt egenskaperna av en inre produkt. □

8. Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara en matris och $k \in \mathbb{N}$ en naturligt tal så att $A^k \neq 0$ och $A^{k+1} = 0$.

(a) Visa att $I_n, A, A^2, \dots, A^k$ är linjärt oberoende. (2 p)

(b) Visa att $I_n - A$ är inverterbar. (2 p)

Lösningsförslag. Vi börjar med en att observera att om $A^n = 0$ för något naturligt tal n så är $A^m = 0$ för alla $m \geq n$ eftersom $A^m = A^n \cdot A^{m-n} = 0 \cdot A^{m-n} = 0$. Från det får vi också att om $A^n \neq 0$ då är $A^\ell \neq 0$ för alla $\ell \leq n$. Speciellt har vi i våra fall att $A^n = 0$ om $n \geq k+1$ och $A^m \neq 0$ om $n \leq k$.

(a) Vi gör ett motsägelsebevis och antar att $I_n, A, A^2, \dots, A^k$ är linjär beroende. Då finns det reella tal $c_0, c_1, \dots, c_k$, inte alla noll, så att $c_0 I_n + c_1 A + \dots + c_k A^k = 0$. Låt $i \leq k$ vara det minsta index sådan att $c_i \neq 0$. Då får vi att

$$c_i A^i + c_{i+1} A^{i+1} + \dots + c_k A^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^i = - \left(\frac{c_{i+1}}{c_i} A^{i+1} + \dots + \frac{c_k}{c_i} A^k \right).$$

Om vi multiplicerar båda sidorna av ekvationen med A^{k-i} får vi att

$$A^k = - \left(\frac{c_{i+1}}{c_i} A^{k+1} + \dots + \frac{c_k}{c_i} A^{2k-i} \right) = 0$$

eftersom $A^{k+1} = \dots = A^{2k-i} = 0$. Alltså har vi fått en motsägelse mot att $A^k \neq 0$ och vi drar slutsatsen att det inte kan finnas något linjärt beroende.

(b) Vi kan skriva upp ett uttryck för inversen till $I_n - A$ som

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^k.$$

Detta gäller eftersom

$$\begin{aligned} (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^k) &= (I_n + A + A^2 + \dots + A^k) - (A + A^2 + A^3 + \dots + A^{k+1}) \\ &= I_n - A^{k+1} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Vi kan också se att $I_n - A$ är inverterbar genom att se att 1 annars skulle vara ett egenvärde till A , vilket skulle ge att det finns en vektor $\mathbf{x} \neq 0$ med $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Detta motsäger att $A^{k+1} = 0$, eftersom $A^{k+1}\mathbf{x} = A^k\mathbf{x} = \dots = \mathbf{x} \neq 0$.

□