

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122

Måndag 2021-12-20 kl 14:00-19:00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Fullständiga lösningar ska ges på samtliga problem
OBS: skriv endast på inlämningssidornas framsidor

Hjälpmedel Miniräknare

Examinator Mats Wallin tel 073 765 2000

1. En gummiboll med diameter 5.0 cm släpps från 1.0 m höjd, träffar golvet och studsar upp till 0.9 m höjd. Beräkna temperaturökningen i gummibollen. Gummi har specifik värmekapacitet $c = 2.0 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ och densitet $1.2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

2. Uppskatta atmosfärlagrets tjocklek h med hjälp av lufttrycket vid jordytan. Antag att luftens densitet är konstant 1 kg/m^3 upp till höjden h och sedan avtar snabbt.

3. Använd dimensionsanalys för att bestämma ett uttryck för massan hos en vattendroppe som droppar från en vattenkran. Svaret ska ha formen

$$m = \sigma^a D^b g^c f\left(\frac{\rho D^2 g}{\sigma}\right)$$

där vattens densitet är ρ , ytspänning dvs energi per ytenhet σ , vattenkranens rördiameter D , och tyngdaccelerationen g . Värdena på a, b, c ska bestämmas. Förklara betydelsen av funktionen $f(\rho D^2 g / \sigma)$.

4. Om en astronaut utan rymddräkt hamnar i rymden utanför rymdskeppet, hur snabbt sker kroppens avkylning vid tiden då astronauten lämnar rymdskeppet? Antag att astronautens massa är 70 kg och kroppsarea 1.7 m^2 . Svaret ska ges i enheten kelvin per sekund.

5. En 50 watt motor används för att frysa 2.0 kg vatten vid 0°C till is. Den omgivande temperaturen är 27°C . Antag att processen är ideal. Hur lång tid tar det för vattnet att frysa till is?

VÄND!

6. I en sluten behållare med fixerad total volym $V = V_1 + V_2$ finns en kolv som delar volymen i två delar med volym V_1 och V_2 . Antag att varken värme eller partiklar kan passera genom behållarens ytterväggar och att värme men inte partiklar kan passera genom kolven. Vid kolvens initialposition finns 1.0 liter luft med temperatur 200 K och 2.0 atm tryck i volym 1, och 1.0 liter luft med temperatur 300 K och 1.0 atm i volym 2. Kolven flyttas (utan påverkan av ett yttre arbete) så att V_1 och V_2 ändras men $V = V_1 + V_2$ hålls konstant. I slutläget hos kolven råder jämvikt mellan de båda delvolymerna. Bestäm jämviktsvärdena på tryck, temperatur samt volymerna V_1, V_2 .

7. En blandning av n_1 mol helium och $n_2 = 2n_1$ mol kväve har initialt volymen V_i och temperaturen T_i . Gasblandningen komprimeras reversibelt och adiabatiskt till slutvolymen V_f och temperaturen T_f . Visa att sluttrycket kan skrivas

$$P_f = P_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^g$$

och bestäm g . Starta med att visa att entropiändringen i en reversibel process ges av

$$\Delta S = n c_V \ln \frac{T_f}{T_i} + n R \ln \frac{V_f}{V_i}$$

8. Inre energin, entropin, volymen, och partikelantalet är extensiva. Om de multipliceras med en faktor λ så ändras de på samma sätt:

$$U(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda U(S, V, N)$$

Visa att detta leder till Gibbs-Duhems relation:

$$U = TS - PV + \mu N$$

Ledning: Kedjeregeln för flera variabler har formen

$$\frac{df(x(t), y(t), z(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

LYCKA TILL!

FORMELBLAD I TERMODYNAMIK

Boltzmanns konstant	$k = 1.380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Gaskonstanten	$R = N_A k = 8.314 \text{ J/(K mol)}$
Avogadros konstant	$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$
Atomära massenheten	$u = 1.660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Plancks konstant	$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Ljushastigheten	$c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Atmosfärstryck	$1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$
Atommassor m/u	H: 1, He: 4, C: 12, N: 14, O: 16, Ar: 40
Luft	ca 80% N ₂ och 20% O ₂
Stefan-Boltzmanns konstant	$\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$
Solarkonstanten	$\varphi = 1.4 \text{ kW/m}^2$
Värmekapacitet för vatten vid 15°C	$c = 4.19 \text{ kJ/K kg}$
Förångningsentalpi vatten 100°C, 1 atm	2260 kJ/kg
Värmekapacitet för is vid -4 °C	$c = 2.2 \text{ kJ/K kg}$
Smältentalpi för is	333 kJ/kg
Pris för hushållsel inklusive skatt	1 kr/kWh
Människa effekt: vila/promenad/löpning	1/2/5 W/kg
Cirkelns omkrets och area	$2\pi R$ och πR^2
Sfärens area och volym	$4\pi R^2$ och $4\pi R^3/3$
Logaritmer	$\ln ab = \ln a + \ln b, \ln a/b = \ln a - \ln b$ $d \ln x / dx = 1/x, \int 1/x dx = \ln x$ $x = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$
Lösningar till $x^2 + px + q = 0$	
Kinetisk energi	$E_K = \frac{1}{2}mv^2$
Gravitationell potentiell energi	$E_P = mgh, g = 9.8 \text{ m/s}^2$
Effekt=energi per tidsenhet	dE/dt
Tryck	$P = F/A$
Arbete	$dW = -PdV$
Ideal gas	$PV = NkT = nRT$
Monoatomär ideal gas	$U = \frac{3}{2}NkT$
Diatomär ideal gas	$U = \frac{5}{2}NkT$
Van der Waals tillståndsekvation	$P = NkT/(V - Nb) - a(N/V)^2$
Van der Waals tillståndsekvation 1 mol	$(P + a_0/v^2)(v - b_0) = RT, a_0 = aN_A^2, b_0 = bN_A$
Isoterm kompressibilitet	$\kappa = -(1/V)(\partial V/\partial P)_T$
Isobar volymutvidgningskoefficient	$\alpha_V = (1/V)(\partial V/\partial T)_P$
Boltzmannfördelningen	$n_i = \text{konstant} \cdot \exp(-E_i/kT)$
Maxwell-Boltzmanns hastighetsfördelning	$f^3(v) = 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2}v^2 \exp(-mv^2/2kT)$
MB fördelning av hastighetskomponent	$f^1(v_x) = \sqrt{m/2\pi kT} \exp(-mv_x^2/2kT)$
Medelhastighet	$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/m\pi}$
Medelkvadrathastighet	$\langle v^2 \rangle = 3kT/m$
Mest sannolika hastighet	$v_p = \sqrt{2kT/m}$
Kollisionstid	$\tau = 1/(n\pi d^2\sqrt{2}\langle v \rangle)$
Medelfri väg	$l = \langle v \rangle \tau = 1/(n\pi d^2\sqrt{2})$
Stöttal	$\nu = P/\sqrt{2\pi mkT}$

Värmefflöde	$\Phi = dQ/dt$
Värmefflödestäthet	$\varphi = \Phi/A$
Fouriers lag	$\Phi = -\lambda A \Delta T / \Delta x$
Konvektion	$\Phi = \alpha A (T_1 - T_2)$
Värmeöverföring genom vägg	$\Phi = U A \Delta T$
U-värde	$1/U = 1/\alpha + \Delta x/\lambda$
Plancks strålningslag	$u(f, T) = (8\pi h f^3 / c^3) / [\exp(hf/kT) - 1]$
Wiens förskjutningslag	$hf_{\max}/kT = 2.821$, $T\lambda_{\max} = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
Stefan-Boltzmanns lag	$\varphi = \sigma T^4$
Nettoflöde:	$\Phi = A\varepsilon\sigma(T^4 - T_0^4)$
Första lagen	$dU = dQ + dW$
Isokor värmekapacitet	$C_V = (\partial Q / \partial T)_V$
Isobar värmekapacitet	$C_P = (\partial Q / \partial T)_P$
Monoatomär ideal gas:	$C_V = \frac{3}{2}Nk, C_P = \frac{5}{2}Nk = C_V + Nk$
En mol ideal gas	$c_P = c_V + R$
Adiabat	$PV^\gamma = \text{konstant}, \gamma = C_P/C_V$
Adiabat	$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}, TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{konstant}$
Adiabatiskt arbete	$W = (P_2V_2 - P_1V_1)/(\gamma - 1)$
Verkningsgrad värmemaskin	$\eta = \Delta W /\Delta Q_1$
Carnotprocess	$\eta = 1 - T_2/T_1, \Delta Q_1/T_1 = \Delta Q_2/T_2$
Kylfaktor	$\varepsilon = \Delta Q_2/\Delta W$
Värmefaktor	$\varepsilon_v = \Delta Q_1/\Delta W$
Entropi	$S = k \ln \Omega$
Reversibel värmeöverföring	$dQ = TdS$
Irreversibel värmeöverföring	$dQ < TdS$
Entalpi	$H = U + PV$
Helmholtz fria energi	$F = U - TS$
Gibbs fria energi	$G = F + PV$

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122 2021-12-20

LÖSNING

1. En gummiboll med diameter 5.0 cm släpps från 1.0 m höjd, träffar golvet och studsar upp till 0.9 m höjd. Beräkna temperaturökningen i gummibollen. Gummi har specifik värmekapacitet $c = 2.0 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ och densitet $1.2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Energi som blir till värme:

$$\Delta E = mg\Delta h = \Delta Q = C\Delta T = mc\Delta T$$

Notera att massan kancellerar. Detta ger

$$\Delta T = \frac{g\Delta h}{c} = \frac{9.82 \cdot 0.1}{2.0 \cdot 10^3} = 0.49 \cdot 10^{-3} \text{ K}$$

SVAR: 0.49 mK

2. Uppskatta atmosfärlagrets tjocklek h med hjälp av lufttrycket vid jordytan. Antag att luftens densitet är konstant 1 kg/m^3 upp till höjden h och sedan avtar snabbt.

Analysera en luftpelare med basarea A och höjd h :

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho Ahg}{A} = \rho hg \Rightarrow h = \frac{P}{\rho g} = \frac{10^5}{1 \cdot 10} = 10^4 \text{ m}$$

SVAR: 1 mil

3. Använd dimensionsanalys för att bestämma ett uttryck för massan hos en vattendroppe som droppar från en vattenkran. Svaret ska ha formen

$$m = \sigma^a D^b g^c f\left(\frac{\rho D^2 g}{\sigma}\right)$$

där vattens densitet är ρ , ytspänning dvs energi per ytenhet σ , vattenkranens rördiameter D , och tyngdaccelerationen g . Värdena på a, b, c ska bestämmas. Förklara betydelsen av funktionen $f(\rho D^2 g / \sigma)$.

Dimensioner: $[m] = M$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[\sigma] = [\frac{1}{2}mv^2/A] = MT^{-2}$, $[D] = L$, $[g] = LT^{-2}$.

Ansats:

$$m = \sigma^a D^b g^c f$$

där f är dimensionslös. Detta ger

$$M = (MT^{-2})^a L^b (LT^{-2})^c = M^a L^{b+c} T^{-2(a+c)}$$

Identifiera koefficienter:

$$a = 1, b + c = 0, a + c = 0$$

dvs $a = 1, c = -1, b = 1$. Massan blir

$$m = \frac{\sigma D}{g} f$$

där f är dimensionslös.

I allmänhet är f en funktion av en dimensionslös variabel. Kontrollera att argumentet är dimensionslöst dvs har dimension =1:

$$[\rho D^2 g / \sigma] = [\rho][D]^2[g]/[\sigma] = \frac{ML^{-3} \cdot L^2 \cdot LT^{-2}}{MT^{-2}} = 1$$

Funktionen f ges inte av dimensionsanalys utan behöver bestämmas på annat sätt.

4. Om en astronaut utan rymddräkt hamnar i rymden utanför rymdskeppet, hur snabbt sker kroppens avkylning vid tiden då astronauten lämnar rymdskeppet? Antag att astronautens massa är 70 kg och kroppsarea 1.7 m^2 . Svaret ska ges i enheten kelvin per sekund.

Antag att astronauten strålar som en perfekt svartkropp. Instrålad energi är försumbar i detta problem. Stefan-Boltzmanns lag och $dQ = CdT$ ger

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dT}{dt} = -\sigma AT^4 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{\sigma AT^4}{C}$$

Antag att kroppens värmekapaciteten är lika med värmekapaciteten för vatten. $C = mc$ ger

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\sigma AT^4}{mc} = -\frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 1.7 \cdot (273 + 37)^4}{70 \cdot 4190} = -3.0 \text{ mK/s}$$

SVAR: -3.0 mK/s

5. En 50 watt motor används för att frysa 2.0 kg vatten vid 0°C till is. Den omgivande temperaturen är 27°C . Antag att processen är ideal. Hur lång tid tar det för vattnet att frysa till is?

Värmen som behöver bortföras är smältentalpin:

$$\Delta Q_2 = M \cdot 333 = 2.0 \cdot 333 = 666 \text{ kJ}$$

En ideal process har kylfaktorn

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q_2}{\Delta W} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1 - \Delta Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \Rightarrow \Delta W = \Delta Q_2 \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

Effekten under tiden t ges av

$$P = \frac{\Delta W}{t}$$

Detta ger

$$t = \frac{\Delta Q_2}{P} \frac{T_1 - T_2}{T_2} = \frac{666 \cdot 10^3}{50} \frac{27}{273} = 1317 \text{ s}$$

SVAR: $1.3 \cdot 10^3 \text{ s}$

6. I en sluten behållare med fixerad total volym $V = V_1 + V_2$ finns en kolv som delar volymen i två delar med volym V_1 och V_2 . Antag att varken värme eller partiklar kan passera genom behållarens ytterväggar och att värme men inte partiklar kan passera genom kolven. Vid kolvens initialposition finns 1.0 liter luft med temperatur 200 K och 2.0 atm tryck i volym 1, och 1.0 liter luft med temperatur 300 K och 1.0 atm i volym 2. Kolven flyttas (utan påverkan av ett yttre arbete) så att V_1 och V_2 ändras men $V = V_1 + V_2$ hålls konstant. I slutläget hos kolven råder jämvikt mellan de båda delvolymerna. Bestäm jämviktsvärdena på tryck, temperatur samt volymerna V_1, V_2 .

Vid jämvikt får båda volymerna samma sluttemperatur T som ges av konservervation av den inre energin:

$$U_1 + U_2 = \frac{5}{2}N_1kT_1 + \frac{5}{2}N_2kT_2 = \frac{5}{2}(N_1 + N_2)kT$$

där $N_1kT_1 = P_1V_1, N_2kT_2 = P_2V_2$. Detta ger

$$T = \frac{N_1kT_1 + N_2kT_2}{N_1k + N_2k} = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{P_1V_1/T_1 + P_2V_2/T_2} = \frac{2.0 + 1.0}{2.0/200 + 1.0/300} = 225 \text{ K}$$

Vid jämvikt fås även samma tryck i båda volymerna som ges av

$$P = \frac{(N_1 + N_2)kT}{V_1 + V_2} = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1 + V_2} = \frac{2.0 + 1.0}{2.0} = 1.5 \text{ atm}$$

Slutvolymerna blir

$$V_1 = \frac{N_1kT}{P} = \frac{P_1V_1}{P} \frac{T}{T_1} = \frac{2.0}{1.5} \cdot \frac{225}{200} = 1.5$$

$$V_2 = \frac{N_2kT}{P} = \frac{P_2V_2}{P} \frac{T}{T_2} = \frac{1.0}{1.5} \cdot \frac{225}{300} = 0.5$$

SVAR: $T = 225 \text{ K}$, $P = 1.5 \text{ atm}$, $V_1 = 1.5 \text{ l}$, $V_2 = 0.5 \text{ l}$

7. En blandning av n_1 mol helium och $n_2 = 2n_1$ mol kväve har initialt volymen V_i och temperaturen T_i . Gasblandningen komprimeras reversibelt och adiabatiskt till slutvolymen V_f och temperaturen T_f . Visa att sluttrycket kan skrivas

$$P_f = P_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^g$$

och bestäm g . Starta lämpligen med att visa att entropiändringen i en reversibel process ges av

$$\Delta S = n c_V \ln \frac{T_f}{T_i} + n R \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$$T dS = dQ = dU - dW = C_V dT + P dV$$

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV = C_V \frac{dT}{T} + n R \frac{dV}{V}$$

Integrera:

$$\Delta S = C_V \int \frac{dT}{T} + n R \int \frac{dV}{V} = C_V \ln \frac{T_f}{T_i} + n R \ln \frac{V_f}{V_i}$$

För blandningen blir vid en adiabatisk=isentropisk process

$$0 = \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = (C_1 + C_2) \ln \frac{T_f}{T_i} + (n_1 R + n_2 R) \ln \frac{V_f}{V_i}$$

vilket ger

$$\ln \frac{T_f}{T_i} = -r \ln \frac{V_f}{V_i} = \ln \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^r$$

där

$$r = \frac{n_1 R + n_2 R}{C_{V1} + C_{V2}} = \frac{n_1 R + n_2 R}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}$$

Exponentiera:

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^r$$

Gaslagen ger

$$\frac{P_f}{P_i} = \frac{N k T_f / V_f}{N k T_i / V_i} = \frac{T_f}{T_i} \frac{V_i}{V_f} = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^r \frac{V_i}{V_f} = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^g$$

där

$$g = r + 1 = \frac{n_1(c_{V1} + R) + n_2(c_{V2} + R)}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}} = \frac{n_1 c_{P1} + n_2 c_{P2}}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}$$

mha $c_P = c_V + R$.

Kontroll: för $n_1 = 0$ eller $n_2 = 0$ fås det vanliga adiabatiska sambandet $PV^\gamma = \text{konstant}$ med $g = \gamma$. OK!

Helium är monoatomärt och har $c_V = \frac{3}{2}R$. Kväve är diatomärt och har $c_V = \frac{5}{2}R$. Detta ger för $n_2 = 2n_1$:

$$g = \frac{\frac{5}{2}n_1 + \frac{7}{2}n_2}{\frac{3}{2}n_1 + \frac{5}{2}n_2} = \frac{5 + 7n_2/n_1}{3 + 5n_2/n_1} = \frac{19}{13} = 1.46$$

SVAR: $g = 1.46$

8. Inre energin, entropin, volymen, och partikelantalet är extensiva. Om de multipliceras med en faktor λ så ändras de på samma sätt:

$$U(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda U(S, V, N)$$

Visa att detta leder till Gibbs-Duhems relation:

$$U = TS - PV + \mu N$$

Ledning: Kedjeregeln för flera variabler har formen

$$\frac{df(x(t), y(t), z(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Derivera mha kedjeregeln:

$$U = \frac{d\lambda U}{d\lambda} = \frac{dU(\lambda S, \lambda V, \lambda N)}{d\lambda} = \frac{\partial U}{\partial \lambda S} \frac{d\lambda S}{d\lambda} + \frac{\partial U}{\partial \lambda V} \frac{d\lambda V}{d\lambda} + \frac{\partial U}{\partial \lambda N} \frac{d\lambda N}{d\lambda} = \frac{\partial U}{\partial \lambda S} S + \frac{\partial U}{\partial \lambda V} V + \frac{\partial U}{\partial \lambda N} N$$

Denna formel gäller för alla värden på λ . Sätt $\lambda = 1$:

$$U = \frac{\partial U}{\partial S} S + \frac{\partial U}{\partial V} V + \frac{\partial U}{\partial N} N$$

Termodynamikens första lag ger

$$dU = TdS - PdV + \mu dN \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial S} = T, P = -\frac{\partial U}{\partial V}, \mu = \frac{\partial U}{\partial N}$$

Detta ger Gibbs-Duhems relation:

$$U = TS - PV + \mu N$$