

Lösningar till Tentamen i Modern Fysik SH1014

08.00-13.00, 2023-01-16, KTH, Stockholm

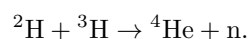
Tentamen består av 8 problem som vardera ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng. Betyget baseras på uppnådd poäng. Betygskriterierna är följande:

A:36-40, B:32-35.5, C:28-31.5, D:24-27.5, E:20-23.5, Fx:18-19.5, F:0-17.5

1. Problem:

Vid den laserbaserade fusionsanläggningen *National Ignition Facility* i Kalifornien så lyckades forskarna i ett experiment 2022 för första gången generera mer energi i fusionsreaktionen än energin som tillfördes reaktionen. Experimentet fungerar genom att små kulor som innehåller en blandning av tungt och supertungt väte utsätts för extrema tryck och temperaturer med hjälp av fokuserade högeffekt-lasrar.

Fusionsreaktionen som används är den s.k. deuterium-tritium-reaktionen, dvs:



a) Använd tabellerade massor för att beräkna reaktionens Q -värde uttryckt i MeV. [3 p]

b) Beräkna den kinetiska energin (i MeV) som heliumkärnan får. [2 p]

För att förenkla problemet så kan vi här anta att ingen inkommande kinetisk energi krävs för reaktionen.

Lösning:

Vi får Q -värdet med hjälp av förändringen i massa. Vi använder atomära massor för att få korrekt elektronbalans mellan VL och HL.

$$\begin{aligned} Q &= \Delta E c^2 = (m(^2\text{H}) + m(^3\text{H}) - m(^4\text{He}) - m(\text{n}))c^2 = \\ &= (2.014101 + 3.016049 - 4.002603 - 1.00866501) \cdot 931.502 = 17.6 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

För att få den kinetiska energin för neutronen så kan vi använda följande formel (som enkelt härleds genom att använda bevarande av energi och rörelsemängd):

$$E_{\text{kin}}(\text{n}) = \frac{Q}{(1 + \frac{m(\text{n})}{m(^4\text{He})})} = 14.1 \text{ MeV}$$

Vi kan förstås använda samma formel (men med omvända massor i nämnaren) för att få heliumkärnans kinetiska energi. Men eftersom vi nu har $E_{\text{kin}}(\text{n})$ så kan vi använda energibevarande från Q -värdet och enkelt få heliumkärnans kinetiska energi enligt följande:

$$E_{\text{kin}}(^4\text{He}) = Q - E(\text{n}) = 3.5 \text{ MeV}.$$

2. Problem:

Studenten Emma funderar på excitationer i luftmolekylerna N_2 och O_2 . Hon ställer sig frågan om luftmolekylernas kinetiska energi vid normal rumstemperatur (20 °C) är tillräcklig för att excitera molekylerna genom vibration och/eller rotation.

I en tabell på Internet så hittar Emma värden för fjäderkonstanterna för N_2 och O_2 : 2287 N/m respektive 1133 N/m. Hon hittar också följande värden på avståndet mellan de två atomerna i grundtillståndet: 109.8 pm för N_2 och 120.8 pm för O_2 .

Hjälp Emma att utföra följande beräkningar:

a) Beräkna energin för det exciterade rotationstillståndet med lägst energi över grundtillståndet, dels för N_2 -molekylen, dels för O_2 . [2 p]

b) Beräkna energin för det exciterade vibrationstillståndet med lägst energi över grundtillståndet, dels för N_2 , dels för O_2 . [2 p]

c) Som ett approximativt mått på den energi som molekylerna kan tillföras pga kollisioner i luften så använder Emma standardfaktorn $k_B T$ (där k_B är Boltzmanns konstant och T lufttemperaturen i Kelvin).

Vilka/vilken av de fyra ovan beräknade excitationerna (om någon) är möjliga vid rumstemperatur? [1 p]

Lösning:

a) Rotationsenergin E_R för en molekyl kan skrivas: $E_R = (\hbar^2/2I) \cdot J(J+1)$, där $I = \mu R^2$ är tröghetsmomentet uttryckt med den reducerade massan, μ , och molekylens interatomära avstånd, R . Tillståndet med $J = 0$ är grundtillståndet. Det första exciterade tillståndet ges av $J = 1$ och skrivs:

$E_R = (\hbar^2/2I) \cdot 2 = \hbar^2/I = \hbar^2/(\mu R^2)$. Den effektiva massan uttrycks i de två atomära massorna som: $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. I vårt fall så är dock $m_1 = m_2$, både för N_2 och för O_2 , vilket ger: $\mu = m^2/2m = m/2$. Massan för kväveatomen ligger mycket nära 14 u vilket ger $\mu_N = 14/2 = 7$ u, och på motsvarande sätt så får vi $\mu_O = 16/2 = 8$ u. Detta ger, tillsammans med värden på R från uppgiften, energin för det första exciterade rotationstillståndet för molekylerna N_2 :

$$E_R(N_2) = \frac{(6.626 \cdot 10^{-34})^2 \cdot \frac{1}{1.602 \cdot 10^{-19}}}{4\pi^2 \cdot 7 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \cdot (109.8 \cdot 10^{-12})^2} = \dots = 5.0 \cdot 10^{-4} \text{ [eV]},$$

och på motsvarande sätt för O_2 :

$$E_R(O_2) = \frac{(6.626 \cdot 10^{-34})^2 \cdot \frac{1}{1.602 \cdot 10^{-19}}}{4\pi^2 \cdot 8 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \cdot (120.8 \cdot 10^{-12})^2} = \dots = 3.6 \cdot 10^{-4} \text{ [eV]}.$$

b) För vibration så är energin över grundtillståndet för det första exciterade tillståndet: $E_V = E_1 - E_0 = (3/2)h\nu_0 - (1/2)h\nu_0 = h\nu_0$. Vi har vidare att $\nu_0 = (1/(2\pi))\sqrt{k/\mu}$, där μ är 7 u resp. 8 u enligt ovan och $k = 2287$ N/m resp 1133 N/m. Vi får därmed för kvävemolekylen:

$$E_v(N_2) = h\nu_0 = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}}{2\pi \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}} \sqrt{\frac{2287}{(7 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27})}} = 0.29 \text{ [eV]},$$

och för syremolekylen:

$$E_v(O_2) = h\nu_0 = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}}{2\pi \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}} \sqrt{\frac{1133}{(8 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27})}} = 0.19 \text{ [eV]}.$$

c) Den approximativa kollisionens energi (vi har här förenklat och inte tagit hänsyn till antalet frihetsgrader) är enligt uppgiften:

$$k_B T = \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293}{1.602 \cdot 10^{-19}} = 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ eV}.$$

Vi ser att vi värmeenergin i luften är tillräcklig för excitation till *rotationstillstånd* av både N_2 och O_2 , men ej tillräcklig för excitation av *vibrationen* för någon av molekylerna.

3. Problem:

En väteatom i tillståndet $\Psi(n, l, m_l, m_s) = \Psi(3, 2, 0, \frac{1}{2})$ de-exciterar till $\Psi(2, 1, 0, \frac{1}{2})$.

a) Vilken energi (i eV) och våglängd (i nm) får fotonen som sänds ut? [1 p]

b) Bestäm den mest sannolika radien för elektronen i tillståndet $\Psi(2, 1, 0, \frac{1}{2})$. [2 p]

c) Beräkna väntevärdet för radien för samma tillstånd [2 p]

Lösning:

a)

I väteatomen finns endast en elektron, så vi har inga skärmningseffekter och således beror (vi försummar här spin-ban-kopplingen som ger en mycket liten effekt) energin endast på huvudkvantalet:

$$h\nu = \Delta E = E_3 - E_2 = 13.6 \text{ [eV]} \left(-\frac{1}{3^2} - \left(-\frac{1}{2^2} \right) \right) = 1.889 \text{ eV.}$$

Detta är alltså fotonens energi. Våglängden blir:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{E} = 657 \text{ nm.}$$

Detta är rött ljus i det synliga området.

b)

Vi har:

$$\psi = \psi(2, 1, 0, \frac{1}{2}) = R_{2,1}(r)Y_1^0$$
$$R_{2,1} = \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{\sqrt{3}a_0} e^{-r/2a_0}.$$

Sannolikheten, $P(r)$, att hitta elektronen i ett sfärisk skäl, med tjocklek dr , vid r , är: $P(r) = kr^2 R^2(r)$, där konstanten k i detta fall är ointressant. Mest sannolik radie hittas där $P(r)$ har sitt maximum. För att hitta det så sätter vi upp: $\frac{dP(r)}{dr} = 0$:

$$\frac{d}{dr} \left(r^4 e^{-r/a_0} \right) = 0$$
$$4r^3 e^{-r/a_0} + r^4 e^{-r/a_0} \cdot (-1/a_0) = 0$$
$$r = 4a_0,$$

där de triviala lösningarna vid $r = 0$ och $r = \infty$ motsvarar noll-derivata vid origo och på långt avstånd. Vi ser att den mest sannolika radien är vid $r = 4a_0$.

c)

För väntevärdet så har vi:

$$\langle r_{2,1,0,1/2} \rangle = \langle \psi_{2,1,0,1/2}^* | r | \psi_{2,1,0,1/2} \rangle =$$
$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi^* r \psi r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi =$$
$$\int_0^\infty R^* r R r^2 dr = \frac{1}{(2a_0)^3 3a_0^2} \int_0^\infty r^5 e^{-r/a_0} dr.$$

Notera: det är viktigt att säkerställa att vågfunktionen R är korrekt normerad. För att kolla det så kan man konstatera att sannolikheten för att hitta elektronen i ett sfäriskt skal, $P(r)$, ska vara lika med $R^2(r)$ gånger dr gånger ytan på skalet: $P(r) = R^2(r) 4\pi r^2 dr$. Sedan kan man skriva integralen över P från $r = 0$ till $r = \infty$ och konstatera att den blir lika med 1. Om så inte är fallet så får man korrigera med lämplig konstant på R . Men för ovanstående uttryck på $R(r)$ så stämmer det.

Med formeln som gavs i formelbladet så kan vi nu lösa integralen ovan:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{(2a_0)^3 3a_0^2} \int_0^\infty r^5 e^{-r/a_0} dr = \frac{1}{24a_0^5} \frac{5!}{(1/a_0)^6} = 5a_0.$$

Väntevärdet för r blir alltså $5a_0$.

4. Problem:

Det interstellära objektet 'Oumuamua observerades i vårt solsystem den 19:e oktober 2017. Objektet är långsmalt med en längd på ca 230 m och en diameter på ca 35 m. 'Oumuamua färdades förbi jorden med en hastighet på 26.3 km/s riktat längs dess långa dimension och passerade ca 24 miljoner km från Jorden. Den upptäcktes på grund av den reflekterade solstrålningen.

a) Vilken våglängd har i allmänhet det mest intensiva ljuset från solen som når jordens atmosfär? [1 p]

b) Hur fort skulle objektet behöva färdas för att vi från Jorden skulle uppfatta den som sfärisk? [2 p]

c) Utgå från våglängden i uppgift (a). Vad kunde vi på Jorden ha uppmätt för våglängd på solljuset efter att det reflekterats mot 'Oumuamuas yta när objektet var långt ifrån oss och på väg nästan rakt *mot* oss [1 p], respektive när den var långt ifrån oss på väg nästan rakt *från* oss? [1 p]

Lösning:

a)

Solens spektrum har sin högsta intensitet vid ca 500 nm. Denna våglängd ligger ungefär mitt i det för oss synliga spektrumet. Detta är förstås ingen slump; våra ögon är evolutionärt anpassade till att se just i det området där solens intensitet är stark.

Om man vet att solens yttemperatur ligger på ca 5800 K så kan man använda Wiens förskjutnings lag: $\lambda_{\max} = 2.898 \cdot 10^{-3} / T = 500$ [nm]. Vår kunskap om denna temperatur har förstås kommit den omvända vägen: mätningar av Planckkurvan och $\lambda_{\max}$ har givit oss yttemperaturen.

b)

Här använder vi formalismen för längdkontraktion och insikten att längden L för Jord-observatören ska vara lika med bredden, d :

$$\begin{aligned} L &= \frac{L_0}{\gamma} = d \\ \gamma &= \frac{L_0}{d} = \frac{230}{35} = 6.5714 \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \frac{v}{c} &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{35}{230}\right)^2} = 0.98835. \end{aligned}$$

Vi ser att hastigheten blir 0.9884 c .

c)

Här använder vi resultaten ovan, dvs $\lambda_0 = 500$ [nm] och $v/c = 0.98835$. I formeln för relativistiskt Dopplershift så sätter vi $\theta = 180^\circ$ och $\theta = 0^\circ$ för de två fallen då farkosten rör sig *mot* respektive *från* oss. Formeln kan skrivas om för att få relationen mellan våglängderna:

$$\begin{aligned} f &= \frac{f_0}{\gamma(1 + \frac{v}{c}\cos\theta)} \\ \lambda &= \lambda_0\gamma(1 + \frac{v}{c}\cos\theta). \end{aligned}$$

På grund av att solljuset *reflekteras* på objektet och återvänder till oss så behöver man använda formeln två gånger. Vårt $\lambda_0 = 500$ [nm] är solljusets våglängd. Vi

antar (lite förenklat) här att vi på Jorden är i samma inertialsystem som Solens. Våglängden som Objektet, då det rör sig *mot* oss (och Solen) kan vi nu kalla λ_1 . Samma våglängd λ_1 reflekteras i Objektets inertialsystem. Detta ljus uppfattas sedan av oss som λ_{mot} :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_0 \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos(180^\circ)\right) = \lambda_0 \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right) \\ \lambda_2 &= \lambda_1 \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \lambda_0 \gamma^2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 = \dots = 2.9 \text{ [nm]}.\end{aligned}$$

Då Objektet rör sig *från* oss så blir det ett enkelt teckenbyta, men i övrigt samma formalism:

$$\lambda_2 = \lambda_0 \gamma^2 \left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 = \dots = 85 \text{ } \mu\text{m}.$$

Vi får alltså de två våglängderna $\lambda_{\text{mot}} = 2.9 \text{ [nm]}$ och $\lambda_{\text{frn}} = 85 \text{ } \mu\text{m}$.

5. Problem:

I Sverige har vi beslutat att använt kärnbränsle ska slutförvaras permanent i kopparkapslar djupt nere i berggrunden. I använt kärnbränsle finns många högaktiva isotoper som fortsätter stråla under mycket lång tid efter att bränslet tagits ur reaktorn. Gammastrålningen från cesium-137 har lyfts fram som intressant att studera vidare eftersom den indirekt, genom spridda elektroner, som sedan växelverkar elastiskt med atomer, skulle kunna orsaka skador på metallerna som ska hålla kapseln tät. Cs-137 emitterar gammastrålning med 662 keV energi. Viss risk för strålskador finns om den kinetiska energin som metallatomerna får överstiger ungefär 30 eV. En relativistisk elektron med energi E_k kan överföra den kinetiska energin T till en atom med massa M i gittret i en helt elastisk växelverkan enligt:

$$T = \frac{2E_k}{Mc^2} (E_k + 2m_e c^2) \sin^2 \frac{\phi}{2},$$

där ϕ är spridningsvinkeln för elektronen i **massecentrums**systemet labbsystemet och m_e är elektronmassan. Medelmassan, M , för kopparatomer (isotopmedelvärde) är 63.55 [u].

a) Vilka växelverkansmekanismer mellan fotoner och elektroner kan vara relevanta i det här fallet? [1 p]

b) Bestäm den maximala energin på de elektroner som Comptonsprids av gammastrålningen [3 p]

c) Bestäm hur stor kinetisk energi en Comptonspridd elektron (med ovan beräknade maximala kinetiska energi E_k) i sin tur maximalt kan överföra till en kopparatom i kapseln. [1 p]

Lösning:

a)

Både *fotoelektrisk effekt* och *Comptonspridning* är vanliga växelverkningsprocesser för fotoner i materia vid en energi på 662 keV. Däremot så kan vi inte ha parbildning eftersom energin är lägre än två gånger vilomassan för en elektron: $662 \text{ [keV]} < 1022 \text{ [keV]} = 2m_e c^2$.

b)

Vi använder formeln för Comptonspridning. Elektronens kinetiska energi är skillnaden mellan den inkommande fotonens energi, E , och den spridda fotonens energi, E' , vi har alltså $E_k = E - E'$. Maximum för E_k (och därmed minimum för E')

fås för vinkeln $\cos \theta = \pi$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} &= \frac{1 - \cos \theta}{m_e c^2} \\ \frac{1}{E'_{\min}} - \frac{1}{E} &= \frac{2}{m_e c^2} \\ E_k &= E - E'_{\min} = E - \frac{1}{\frac{2}{m_e c^2} + \frac{1}{E}} = \dots = 477.65 \text{ keV}.\end{aligned}$$

Den maximala kinetiska energin för den spridda elektronen är 478 keV.

c)

Här så använder vi formeln från problemlydelsen. vi har: $E_k = 0.478 \text{ MeV}$, $M = 63.55 \cdot 931.602 = 59203 \text{ MeV}/c^2$, och $\phi = \pi$ (eftersom en kollision som skickar atomen rakt framåt och elektronen efter spridning rakt bakåt ger störst energi till atomen). Detta ger:

$$\begin{aligned}T &= \frac{2 \cdot 0.478}{59203} (478 + 2 \cdot 511 [\text{keV}]) \sin^2 \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{2 \cdot 0.478}{59203} (478 + 1022) [\text{keV}] = 24.2 \text{ eV}.\end{aligned}$$

Vi ses att atomen får en kinetiska energi på ca 24 eV, en bra bit under gränsen för strålskador som ligger på 30 eV. I detta fall så förväntar vi oss alltså inga strålskador inducerade av Comptonspridningen.

Lite överkurs som inte ingår i talet: här kan det vara värt att notera att vi också kan ha fotoelektrisk effekt så att gammafotonerna överför hela sin energi till elektronen, och där elektronens kinetiska energi blir 662 keV minus elektronens bindningsenergi. I koppar så är denna bindningsenergi max några fåtal keV, vilket innebär att de elektroner som frigörs på detta sätt faktiskt kan inducera strålskador. Fotoelektrisk effekt är inte lika sannolikt som Comptonspridning i detta energiområde, så det är ändå en sekundär effekt, men ändå värt att tänka på.

6. Problem:

En partikel med massan m befinner sig i en endimensionell potential, $U(x)$. Partikelns vågfunktion kan skrivas:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax^4 e^{-ax} & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Normera vågfunktionen, dvs bestäm konstanten A . [2 p]

b) Bestäm potentialen $U(x)$. [2 p]

c) Bestäm partikelns energi. [1 p]

Lösning:

a)

För att normera vågfunktionen så sätter vi:

$$\int_0^\infty \psi^2(x) dx = 1,$$

där vi bara behöver integrera över positiva x eftersom vågfunktionen är 0 för ne-

gativa x . Vi får, med hjälp av formelbladets integralformel:

$$\begin{aligned} A^2 \int_0^\infty x^8 e^{-2ax} dx &= 1 \\ A^2 \frac{8!}{(2a)^9} &= 1 \\ \frac{40320 A^2}{512 a^9} &= 1 \\ A = \sqrt{\frac{512 a^9}{40320}} &= \frac{2a^{9/2}}{3\sqrt{35}} \end{aligned}$$

b)+(c)

För att hitta formen för potentialen $U(x)$ samt energin E så sätter vi in $\psi(x)$ i Schrödingerekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Vi börjar med att derivera $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(x)}{dx} &= 4Ax^3 e^{-ax} + Ax^4(-a)e^{-ax}. \\ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= 12Ax^2 e^{-ax} + 4Ax^3(-a)e^{-ax} - 4Aax^3 e^{-ax} + a^2 Ax^4 e^{-ax} = \\ &= 12Ax^2 e^{-ax} - 8aAx^3 e^{-ax} + a^2 Ax^4 e^{-ax} = \\ &= Ax^4 e^{-ax} \left(\frac{12}{x^2} - \frac{8a}{x} + a^2 \right) = \psi(x) \left(\frac{12}{x^2} - \frac{8a}{x} + a^2 \right). \end{aligned}$$

Schrödingerekvationen kan nu skrivas ut:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) &= E\psi(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \psi(x) \left(\frac{12}{x^2} - \frac{8a}{x} + a^2 \right) + U(x)\psi(x) &= E\psi(x) \\ \frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{12}{x^2} + \frac{8a}{x} - a^2 \right) &= E - U(x). \end{aligned}$$

Vi identifierar konstanttermen som E och den x -beroende delen som $U(x)$:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\hbar^2 a^2}{2m} \\ U(x) &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{12}{x^2} - \frac{8a}{x} \right) = \frac{2\hbar^2}{m} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{2a}{x} \right). \end{aligned}$$

7. Problem:

Forskningsprojektet *Artemis* startade 2022 och leds av KTH. I detta projekt så undersöker man möjligheten att använda underjordiska radonmätningar för att upptäcka kommande jordbävningar flera dagar i förväg. Detta har att göra med att berggrund som innehåller radioaktiva uran- och torium-isotoper och nuklider i dess sönderfallskedjor kan frigöra radon i gasform när trycket i berggrunden förändras pga seismisk aktivitet.

En forskare känner till att isotopförhållandet i ett visst geografiskt område mellan de två radium-isotoperna (radium=Ra): ^{226}Ra och ^{228}Ra har ett värde $R_N = 2.5$, dvs: $R_N = N(\text{Ra}228)/N(\text{Ra}226)$. Halveringstiden, $t_{1/2}$, är 1600 år för Ra-226 och 5.75 år för Ra-228.

a) Beräkna förhållandet R_A mellan de två aktiviteterna för radium-isotoperna:

$$R_A = A(\text{Ra228})/A(\text{Ra226}). \quad [1 \text{ p}]$$

b) Nukliden Ra-226 sönderfaller med alfa-sönderfall. Vilken är dotternukliden (ange både grundämne och masstal) i detta sönderfall? [1 p]

Många olika radioaktiva isotoper populeras i sådana sönderfallskedjor, bland annat flera radon-isotoper. Och eftersom radon är en ädelgas så kan just radon-isotoperna diffundera genom jordlager utan att reagera kemiskt, transporteras naturligt i grundvatten, och även pumpas upp tillsammans med grundvatten.

Anta att de två radon-isotoperna Rn-220 (halveringstid: 3.825 dagar) och Rn-222 (halveringstid: 55.6 sekunder) har samma aktivitet (per vattenvolym) i en viss punkt där de befinner sig i vattnet djupt nere i berggrunden, dvs $A(\text{Rn220}) = A(\text{Rn222})$. Anta vidare att radongasen pumpas upp tillsammans med vattnet med en hastighet av 2.2 m/s. Vid en detektor som är placerad vid jordytan så mäts förhållandet av aktiviteterna i vattnet, dvs: $R_{AA} = A(\text{Rn220})/A(\text{Rn222})$ upp till värdet $0.00813 \pm \frac{1}{0.00813}$. Vi antar att pumptransporten av de radioaktiva isotoperna sker rakt uppåt.

c) Beräkna djupet under jordytan (i meter) från vilket gasen emitterades. [3 p]

Lösning:

a) Vi har $A = N \cdot \lambda = N \cdot \ln 2/t_{1/2}$, vilket ger:

$$R_A = A(228)/A(226) = R_N \cdot t_{1/2}(226)/t_{1/2}(228) = 2.5 \cdot 1600/5.75 = 696.$$

b) Dottern till Ra-226 har två protoner mindre: $88 - 2 = 86$. Detta atomtal motsvarar radon (Rn). Dottern har också 4 lägre i masstal: $A = 226 - 4 = 222$, vilket ger isotopen: Rn-222.

c) Eftersom halveringstiderna i detta fall är så olika för de två isotoperna så kan vi approximativt säga att $A(222)$ är konstant. (Det går förstås bra att räkna utan detta antagande, och man får då samma resultat). sönderfall av Rn-220:

$$\begin{aligned} A &= A_0 \cdot e^{-t \cdot \ln 2/t_{1/2}} \\ \frac{A_0(220)}{A_0(222)} &= 1 \\ R_{AA} &= \frac{A(220)}{A(222)} = \frac{1}{0.00813} = \frac{e^{-t \cdot \ln 2/t_{1/2}(220)}}{e^{-t \cdot \ln 2/t_{1/2}(222)}} = \\ &= e^{t \ln 2 (1/t_{1/2}(222) - 1/t_{1/2}(220))} \\ \ln \left(\frac{1}{0.00813} \right) &= t \ln 2 \left(\frac{1}{t_{1/2}(222)} - \frac{1}{t_{1/2}(220)} \right) \\ t &= \frac{\ln \left(\frac{1}{0.00813} \right)}{\ln 2 \left(\frac{1}{55.6} - \frac{1}{3.825 \cdot 24 \cdot 3600} \right)} = 386 \text{ [s]}. \end{aligned}$$

Vi kan, om vi vill, redan från början betrakta aktiviteten för Rn-220 som konstant i ovanstående formler, eftersom dess halveringstid är så mycket längre än halveringstiden för Rn-222. Algebran blir då lite lättare och resultatet nästan detsamma. Med ovanstående transporttid, t , så kan vi nu med känd hastighet, $v = 2.2 \text{ m/s}$, räkna ut djupet, d . Det blir: $d = v \cdot t = 2.2 \cdot 386 = 849 \text{ m}$.

8. Problem:

Under 1970-talet så började man bygga anläggningar där två accelererade partikelstrålar kolliderade med varandra symmetriskt, dvs så att kollisionens masscentrum sammanföll med labbsystemet. Anledningen var att det då krävs avsevärt mindre

kinetisk energi för att skapa nya partiklar. För att illustrera denna skillnad så tar vi i detta problem exemplet med en positron som kolliderar med en elektron.

Vi börjar att betrakta fallet ovan då alltså elektronen och positronen kommer från varsitt håll, var och en med samma kinetiska energi, E_k , och kolliderar symmetriskt i mitten, dvs i masscentrum. Vi väljer nu ett värde på E_k , precis tillräckligt stort för att följande reaktion är möjlig:

$$e^+ + e^- \longrightarrow \tau^- + \tau^+.$$

Tau-partikeln τ^- är liksom elektronen en negativt laddad lepton, men har avsevärt högre massa, se formelbladet. Dess antipartikel τ^+ har positiv laddning men samma massa.

a) Beräkna E_k , uttryckt i enheten eV (med lämpligt storleksprefix). [2 p]

Ovanstående reaktion genomfördes för första gången 1974 med acceleratoren SPEAR i USA. Denna accelerator var byggd med just symmetriskt inkommande strålar som kolliderade enligt ovan.

Vi föreställer oss nu att vi inte har tillgång till en sådan dubbelstråle-accelerator. Istället så använder vi en i labbsystemet stillastående elektrontarget och en inkommande stråle av positroner med den kinetiska energin i labbsystemet, $E_{lab,k}$, precis tillräckligt hög för att reaktionen ovan ska vara möjlig.

b) Beräkna $E_{lab,k}$ [3 p]

Lösning:

a)

I detta fall så kommer elektronen och positronen från var sitt håll med samma hastighet. Masscentrumsystemet är i detta fall identiskt med labbsystemet. Den minsta möjliga kinetiska energin för vilken reaktionen är möjlig motsvarar att de två tauonerna är skapade men i vila i detta inertialsystem. Vi får då:

$$\begin{aligned} E_{\text{fore}} &= 2E_k + 2m_e c^2 = 2(E_k + m_e)c^2 \\ E_{\text{efter}} &= 2m_\tau c^2 \\ E_{\text{efter}} &= E_{\text{fore}} \Rightarrow 2(E_k + m_e)c^2 = 2m_\tau c^2 \\ E_k &= (m_\tau - m_e)c^2 = 1.7763 \cdot 10^9 \text{ [eV]}. \end{aligned}$$

Vi ser att den nödvändiga kinetiska energin är 1.78 GeV.

b)

Detta problem kan lösas på ett par olika sätt. Här visas metoden med hastighets-transformationer.

Labbsystemet: Före reaktionen så rör sig den inkommande positronen med hastigheten u_x i labbsystemet, som motsvarar den sökta kinetiska energin E_k . Elektronen i strålmålet står stilla. Efter reaktionen så rör sig de två tauonerna tillsammans med en hastighet v , som samtidigt är hastigheten mellan labbsystemet och masscentrumsystemet.

I masscentrumsystemet så kommer positronen och elektronen från varsitt håll med samma hastighet, u'_x . Av symmetriskäl så kan man inse att $u'_x = v$, det är den relativa hastigheten mellan elektronen (före) och tauonerna (efter).

Hastighetstransformation ger nu:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \\ \left(\frac{u_x}{c}\right) &= \frac{2\left(\frac{v}{c}\right)}{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2} \end{aligned}$$

Denna hastighet ligger mycket nära ljushastigheten c . Det är därför olämpligt (och omöjligt för de flesta miniräknare) att spara denna hastighet eftersom u_x/c får väldigt många 9:or som decimaler. Informationen om den kinetiska energin ligger i just den lilla skillnaden mellan detta tal och 1. Av detta skäl så behöver vi fortsätta räkna algebraiskt för att få ett uttryck för E_k .

Vi har nu följande användbara samband:

$$\begin{aligned} E_k &= m_e c^2 (\gamma - 1) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \left(\frac{v}{c}\right) &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \\ \gamma_v &= \frac{E_k}{m_e c^2} + 1. \end{aligned}$$

Här har vi använt beteckningen γ_v för att betona att det är Lorentzfaktorn motsvarande hastigheten v . Hastighetstransformationen ovan ger nu:

$$\left(\frac{u_x}{c}\right) = \frac{2\left(\frac{v}{c}\right)}{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{2\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_v^2}}}{2 - \frac{1}{\gamma_v^2}}$$

Vi kan nu räkna ut Lorentsfaktorn i labbsystemet, dvs den som motsvarar u_x/c . Vi kallar den γ_u :

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \dots = 2\gamma_v^2 - 1$$

Från (a)-uppgiften så har vi också sambandet $E_k = (m_\tau - m_e)c^2$. Det gör att vi kan skriva:

$$\begin{aligned} E_{k,\text{lab}} &= m_e c^2 (\gamma_u - 1) = m_e c^2 (2\gamma_v^2 - 2) = 2m_e c^2 (\gamma_v^2 - 1) = \\ &= 2m_e c^2 \left(\left(\frac{E_k}{m_e c^2} + 1 \right)^2 - 1 \right) = 2m_e c^2 \left(\left(\frac{(m_\tau - m_e)}{m_e} + 1 \right)^2 - 1 \right) = \\ &= 2m_e c^2 \left(\left(\frac{m_\tau}{m_e} - 1 + 1 \right)^2 - 1 \right) = 2m_e c^2 \left(\left(\frac{m_\tau}{m_e} \right)^2 - 1 \right) = \\ &= 2 \cdot 0.511 \cdot 10^6 \left(\left(\frac{1776.86 \cdot 10^6}{0.511 \cdot 10^6} \right)^2 - 1 \right) [\text{eV}] = 1.2357 \cdot 10^{13} [\text{eV}] = \\ &= 12.36 [\text{TeV}]. \end{aligned}$$

Den nödvändiga energin för den inkommande positronen behöver vara minst 12.36 TeV för att reaktionen ska vara möjlig med denna metod (stillastående strålmål). Ingen accelerator för positroner har någonsin byggts med så hög energi. Man kan jämföra med den högsta stråleenergin på ca 6.8 TeV (för protoner, som förstås är avsevärt tyngre än positroner) som är möjlig vid LHC-acceratorn på CERN.