

TENTAMEN I VEKTORANALYS

SI1146 och SI1140 Del 1, HT17

Fredagen den 20:e oktober 2017

Anteckna på varje blad: Namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.

Tillåtna hjälpmedel: Formelblad som delas ut. Räknedosa ej tillåten!

Examinator: Edwin Langmann (langmann@kth.se)

Ansvarig lärare: Per Moosavi (pmoosavi@kth.se)

Bonuspoängen från kursomgången HT17 adderas till första uppgiften, dock ger uppgiften max 6 poäng totalt.

Poäng: Varje uppgift kan ge 6 poäng. Betygsgränserna finns på kurshemsidan (kurs-PM).

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Notation: (x, y, z) är kartesiska koordinater, och $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ är Ortsvektorn. (ρ, φ, z) är cylinderkoordinater definierade genom $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. (r, θ, φ) är sfäriska koordinater definierade genom $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

Uppgift 1:

- a) Vorticitetsekvationen för en vätska med hastighetsfält $\mathbf{v}$ har en icke-linjär term

$$\nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]. \quad (1)$$

Visa att uttrycket i (1) försvinner om $\mathbf{v} = v(\rho)\mathbf{e}_z$, där $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, vilket beskriver ett flöde genom ett cylindriskt rör i z -riktningen. [3p]

- b) Betrakta hastighetsfältet $\mathbf{v}$ hos en vätska med en virvel kring z -axeln,

$$\mathbf{v} = \frac{K}{x^2 + y^2}(-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y), \quad K > 0.$$

Beräkna cirkulationen $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ för en cirkel C i xy -planet med radie $R > 0$ och centrum i origo som är positivt orienterad om C betraktas ovanifrån. [3p]

Uppgift 2: Givet konstant vektor $\mathbf{\Omega}$ och vektorfält $\mathbf{v}$, visa m.h.a. indexnotation att:

- a) $\nabla \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) = a\mathbf{\Omega}$, där a är en konstant som ska bestämmas. [3p]
b) $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = b\nabla|\mathbf{v}|^2$, där b är en konstant som ska bestämmas. [3p]

Uppgift 3: Låt A_{ij} och B_{ij} vara komponenterna av två kartesiska tensorfält.

- a) Definiera vad det innebär att A_{ij} är symmetrisk och B_{ij} är antisymmetrisk. [1p]
b) Vilken ordning har: (i) $A_{ij}B_{kl}$, (ii) $A_{ij}B_{kl}\delta_{jk}$ och (iii) $A_{ij}B_{kl}\delta_{ij}\delta_{km}$? [2p]
c) Antag att A_{ij} är symmetrisk och B_{ij} är antisymmetrisk i ett koordinatsystem K . Visa att (i) A'_{ij} är symmetrisk och (ii) B'_{ij} är antisymmetrisk i alla koordinatsystem K' som erhålls från K via transformationen $x'_i = L_{ij}x_j$.¹ [3p]

¹Transformationskoefficienterna L_{ij} satisfierar $L_{ji}L_{jk} = L_{ij}L_{kj} = \delta_{ik}$.

Uppgift 4: Elliptiska cylinderkoordinater (u, v, w) definieras genom²

$$x = a \cosh u \cos v, \quad y = a \sinh u \sin v, \quad z = w,$$

där $u \in [0, \infty)$, $v \in [0, 2\pi)$ och $w \in (-\infty, \infty)$. ($a > 0$ är en konstant.)

a) Visa att skalfaktorerna är

$$h_u = a\sqrt{f(u)^2 - \cos^2 v}, \quad h_v = a\sqrt{\cosh^2 u - g(v)^2}, \quad h_w = 1,$$

där $f(u)$ och $g(v)$ är funktioner som ska bestämmas, och beräkna enhetsvektorerna $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$ och $\mathbf{e}_w$. (Ortogonalitet behöver ej visas.) [3p]

b) Låt

$$\mathbf{A} = \frac{a}{2} \left[\frac{\sinh u \cosh u + u}{\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}} \mathbf{e}_u - \frac{\sin v \cos v + v}{\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}} \mathbf{e}_v \right].$$

Beräkna $\operatorname{div} \mathbf{A}$. [3p]

Uppgift 5: En ideal inkompressibel vätska strömmar förbi en oändligt lång cylinder med radie $R > 0$. Vätskans hastighetsfältet $\mathbf{v}$ har en skalärpotential Φ . Eftersom vätskan är inkompressibel är $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

a) Visa att Φ satisfierar Laplaces ekvation $\nabla^2 \Phi = 0$ utanför cylindern. [1p]

Inför cylinderkoordinater så att z -axeln sammanfaller med cylinderns axel. Pga. symmetri beror Φ ej på z . Antag att $\mathbf{v}$ är parallell med x -axeln långt från cylindern, vilket ger ett randvillkor: $\Phi = v_0 \rho \cos \varphi$ för stora ρ . (v_0 är en konstant.)

b) Ett rimligt antagande är att ingen vätska strömmar genom cylindern. Visa att detta ger ett andra randvillkor: $\frac{\partial}{\partial \rho} \Phi = 0$ då $\rho = R$. [1p]

c) Ansätt $\Phi(\rho, \varphi) = f(\rho) \cos \varphi$ utanför cylindern. Visa att detta ger följande randvärdesproblem:

$$\begin{cases} \rho^2 f''(\rho) + \rho f'(\rho) - f(\rho) = 0 & (R < \rho < \infty), \\ f(\rho) \rightarrow v_0 \rho \text{ då } \rho \rightarrow \infty, \\ f'(R) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Visa att $f(\rho) = A\rho^{-1} + B\rho$ är en lösning till (2), där A och B är konstanter som ska bestämmas. **Slutligen**, beräkna $\mathbf{v}$ utanför cylindern. [4p]

²Kom ihåg: $\cosh u = (e^u + e^{-u})/2$, $\sinh u = (e^u - e^{-u})/2$ och $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$.

Uppgift 6: Låt $u = u(\mathbf{r}, t)$ beteckna neutrontätheten inuti ett homogent klot av uran med radie $R > 0$. Neutronströmtätheten ges av Ficks lag $\mathbf{j} = -D\nabla u$ och produktionen av neutroner pga. uranets sönderfall modelleras av en källterm $\kappa = \lambda u$, där $D > 0$ och $\lambda > 0$ är givna konstanter.³

Betrakta en godtycklig delvolym V av klotet med begränsningsyta S . Låt $M(t)$ vara den totala massan av neutroner i V , $\Phi(t)$ det totala neutronflödet in genom S och $P(t)$ den totala neutronproduktionen i V .⁴

- a) Uttryck $M(t)$, $\Phi(t)$ och $P(t)$ som integraler av u , $\mathbf{j}$ resp. κ . Relatera förändringen i $M(t)$ till $\Phi(t)$ och $P(t)$ och härled därifrån en kontinuitetsekvation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b\nabla \cdot \mathbf{j} = cu, \quad (3)$$

där b och c är konstanter som ska bestämmas. **Slutligen**, kombinera (3) och Ficks lag för att härleda en partiell differentialekvation för u .

Betrakta nu hela klotet. Vi vill formulera ett randvärdesproblem för den stationära lösningen i fallet då vi har introducerat en extra neutronkälla i klotets centrum med konstant neutronproduktion Q .⁵ Vi får två randvillor, varav det ena är $u = 0$ på klotets yta.

- b) Visa att det andra randvillkoret är

$$ru \rightarrow \frac{Q}{4\pi D} \text{ då } r \rightarrow 0^+,$$

där $r = |\mathbf{r}|$ är avståndet från origo.

Ledning: Relatera Q till neutronflödet ut ur en liten sfär med radie $\varepsilon > 0$ och centrum i origo.

- c) Motivera och använd symmetriresonemang för att skriva upp randvärdesproblemet (jmf. (2)) för den stationära lösningen $u(r)$ som enbart beror på r . Eventuella differentialoperatorer ska uttryckas med d/dr . (Randvärdesproblemet ska **ej** lösas.)

[6p]

Lycka till!

³ u har enheten massa per volymenhet; $\mathbf{j}$ har enheten massa per area- och tidsenhet; κ har enheten massa per volym- och tidsenhet.

⁴ $M(t)$ har enheten massa; $\Phi(t)$ och $P(t)$ har enheten massa per tidsenhet.

⁵ Q har enheten massa per tidsenhet.

Formelblad Vektoranalys

Följande formler gäller i ett ortogonalt, kroklinjigt koordinatsystem med koordinaterna u_1, u_2, u_3 , basvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ och skalfaktorerna h_1, h_2, h_3 :

- $d\mathbf{r} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$
- $\text{grad } \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3$
- $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$
- $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$
- $\text{div grad } \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right]$

där A_1, A_2 och A_3 är de kroklinjiga komponenterna av vektorfältet $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3.$$

Specialfall

Cylinderkoordinater: $h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1.$

Sfäriska koordinater: $h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$

ϵ - δ -relationen (tensornotation)

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

Stokes sats (tensornotation)

$$\int_S \epsilon_{rst} \partial_t A_{jk...} dS_s = \oint_C A_{jk...} dx_r$$

Gauss sats (tensornotation)

$$\int_V \partial_i A_{jk...} dV = \oint_S A_{jk...} dS_i$$

Lösningsförslag

OBS: Jag skrev ihop lösningsförslagen hastigt. Jag är tacksam om ni påpekar eventuella felsskrivningar via mejl till: pmoosavi@kth.se

Uppgift 1:

a) Från lösning till Hemtal 2, Uppgift 2b):

Skalfaktorerna i cylinderkoordinater är $h_\rho = h_z = 1$ och $h_\varphi = \rho$. Låt $v'(\rho) = \frac{dv(\rho)}{d\rho}$. För $\mathbf{v} = v(\rho)\mathbf{e}_z$,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & v(\rho) \end{vmatrix} = -v'(\rho)\mathbf{e}_\varphi \\ \implies \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) &= v(\rho)v'(\rho)\mathbf{e}_\rho \\ \implies \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v(\rho)v'(\rho) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{0}}.\end{aligned}$$

b) Från lösning till Hemtal 3, Uppgift 3b):

Parametrisera C genom $\mathbf{r}(\varphi) = R(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ där φ går från 0 till 2π . Tangenten ges av $d\mathbf{r}(\varphi)/d\varphi = R(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$. Således är

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \frac{K}{R^2} R(-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) \cdot R(-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) d\varphi = \boxed{2\pi K}.$$

Uppgift 2:

a)

$$\begin{aligned}[\nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \Omega_l x_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \Omega_l \delta_{jm} \\ &= \Omega_i \delta_{jj} - \Omega_j \delta_{ij} = 3\Omega_i - \Omega_i = [2\boldsymbol{\Omega}]_i \implies \boxed{a = 2}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]_i &= v_j \partial_j v_i + \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \partial_l v_m \\ &= v_j \partial_j v_i + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \partial_l v_m \\ &= v_j \partial_i v_j = \frac{1}{2} \partial_i v_j v_j = \left[\frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 \right]_i \implies \boxed{b = \frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Uppgift 3:

a) A_{ij} och B_{ij} är symmetrisk resp. antisymmetrisk om

$$\boxed{A_{ij} = A_{ji}}, \quad \boxed{B_{ij} = -B_{ji}}.$$

b) Ordningarna är (i) $\boxed{4}$, (ii) $\boxed{2}$ resp. (iii) $\boxed{2}$.

c) Komponenterna i K' satisfierar

$$A'_{ij} = L_{ik}L_{jl}A_{kl} = L_{ik}L_{jl}A_{lk} = L_{jl}L_{ik}A_{lk} = A'_{ji}$$

och

$$B'_{ij} = L_{ik}L_{jl}B_{kl} = -L_{ik}L_{jl}B_{lk} = -L_{jl}L_{ik}B_{lk} = -B'_{ji}.$$

Uppgift 4:

a) Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= a (\sinh u \cos v \mathbf{e}_x + \cosh u \sin v \mathbf{e}_y), \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= a (-\cosh u \sin v \mathbf{e}_x + \sinh u \cos v \mathbf{e}_y), \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} &= \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Använder att $\sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v = (\cosh^2 u - 1) \cos^2 v + \cosh^2 u (1 - \cos^2 v) = \cosh^2 u - \cos^2 v$. Från definitionen av skalfaktorer får vi således

$$h_u = h_v = a\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}, \quad h_w = 1,$$

vilket innebär att $f(u) = \cosh u$ och $g(v) = \cos v$, och enhetsvektorerna blir

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_u &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}} (\sinh u \cos v \mathbf{e}_x + \cosh u \sin v \mathbf{e}_y), \\ \mathbf{e}_v &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}} (-\cosh u \sin v \mathbf{e}_x + \sinh u \cos v \mathbf{e}_y), \\ \mathbf{e}_w &= \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

b) Från formelbladet får vi

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{a^2(\cosh^2 u - \cos^2 v)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(a^2 \frac{\sinh u \cosh u + u}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(a^2 \frac{\sin v \cos v + v}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\cosh^2 u - \cos^2 v} \left[\frac{\cosh^2 u + \sinh^2 u + 1}{2} - \frac{\cos^2 v - \sin^2 v + 1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\cosh^2 u - \cos^2 v} [\cosh^2 u - \cos^2 v] = \boxed{1}.\end{aligned}$$

Uppgift 5:

a) Eftersom Φ är en skalärpotential till $\mathbf{v}$ kan vi skriva $\mathbf{v} = \nabla \Phi$. (Alternativt kan man använda den etablerade konventionen $\mathbf{v} = -\nabla \Phi$, men i den här lösningen används den förstnämnda.) Således är

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

- b) Att ingen vätska strömmar genom cylindern motsvarar att hastighetsfältet i normalriktningen är noll, dvs.

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ då } \rho = R,$$

och eftersom

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (4)$$

i cylinderkoordinater (Φ är oberoende av z) får vi

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \Phi = 0 \text{ då } \rho = R. \quad (5)$$

- c) Ansätt $\Phi(\rho, \varphi) = f(\rho) \cos \varphi$. Eftersom $\Phi = v_0 \rho \cos \varphi$ för stora ρ måste $f(\rho) = v_0 \rho$ för stora ρ , och från (5) får vi $f'(R) = 0$. I cylinderkoordinater är

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right] = \frac{1}{\rho} \left[f'(\rho) + \rho f''(\rho) - \frac{1}{\rho} f(\rho) \right] \cos \varphi.$$

Eftersom $\nabla^2 \Phi = 0$ för $\rho > R$ får vi att (2) måste vara uppfyllt.

Ansätt $f(\rho) = A\rho^{-1} + B\rho$. Då är $f'(\rho) = -A\rho^{-2} + B$ och $f''(\rho) = 2A\rho^{-3}$. Således är

$$\rho^2 f''(\rho) + \rho f'(\rho) - f(\rho) = 2A\rho^{-1} - A\rho^{-1} + B\rho - A\rho^{-1} - B\rho = 0.$$

För stora ρ går $f(\rho)$ mot $B\rho$, vilket tillsammans med det första randvillkoret innebär att $B = v_0$, och från det andra randvillkoret får vi $A = BR^2 = v_0 R^2$. Således är

$$f(\rho) = v_0 \left(\frac{R^2}{\rho} + \rho \right) \implies \Phi(\rho, \varphi) = v_0 \left(\frac{R^2}{\rho} + \rho \right) \cos \varphi. \quad (6)$$

Slutligen, från (4) och (6) får vi att hastighetsfältet är

$$\mathbf{v} = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) \cos \varphi \mathbf{e}_\rho - v_0 \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2} \right) \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi$$

för $R < \rho < \infty$.

Uppgift 6:

- a) $M(t) = \iiint_V u dV$, $\Phi(t) = - \oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} ds$, där enhetsnormalen $\mathbf{n}$ pekar ut från V , och $P(t) = \iiint_V \kappa dV$. Förändringen i massa kan antingen orsakas av flödet in genom S resp. produktionen i V , dvs.

$$\frac{d}{dt} M(t) = \Phi(t) + P(t),$$

vilket efter tillämpning av Gauss sats på integralen i $\Phi(t)$ ger

$$\iiint_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} - \kappa \right] dV.$$

Eftersom V är godtycklig samt $\kappa = \lambda u$ måste

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \lambda u$$

i hela klotet, vilket innebär att $b = 1$ och $c = \lambda$. Från Ficks lag $\mathbf{j} = -D\nabla u$ får vi

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = \lambda u}. \quad (7)$$

b) Betrakta en liten sfär med radie $\varepsilon > 0$ med centrum i origo. Då gäller att

$$\begin{aligned} Q &= \oint_{r=\varepsilon} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{r=\varepsilon} (-D\nabla u) \cdot \mathbf{e}_r dS \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (-D) \frac{\partial u}{\partial r} \bigg|_{r=\varepsilon} \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -4\pi D \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial r} \bigg|_{r=\varepsilon}, \end{aligned}$$

vilket ger

$$\frac{\partial u}{\partial r} \bigg|_{r=\varepsilon} = -\frac{Q}{4\pi D} \frac{1}{\varepsilon^2} \xrightarrow[\text{m.a.p. } \varepsilon]{\text{Integrera}} u|_{r=\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi D} \frac{1}{\varepsilon} + C,$$

där C är en konstant. Eftersom C är oberoende av ε följer att $\varepsilon C \rightarrow 0$ då $\varepsilon \rightarrow 0^+$, vilket innebär att

$$\varepsilon u|_{r=\varepsilon} \rightarrow \frac{Q}{4\pi D} \text{ då } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Om vi ersätter ε med r får vi det sökta randvillkoret.

c) Klotet är homogent och således är vårt område rotationssymmetriskt. Våra randvillkor är också rotationssymmetriska. Således kommer u enbart bero på r och varken på θ eller φ i sfäriska koordinater. Eftersom vi söker den stationära lösningen är u och tidsberoende. Alltså: den stationära lösningen $u = u(r)$ beror enbart på r .

Differentialekvationen i (7) blir därmed

$$D\nabla^2 u + \lambda u = 0$$

där $\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right)$ i sfäriska koordinater. Således får vi randvärdesproblemet

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d^2}{dr^2} u(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} u(r) + \frac{\lambda}{D} u(r) = 0 & (0 \leq r < R), \\ ru(r) \rightarrow \frac{Q}{4\pi D} \text{ då } r \rightarrow 0^+, \\ u(R) = 0. \end{cases}}$$