



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
11 januari 2023

Skrivtid: 14:00–19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Det går dock inte att få mer än 12 respektive 8 poäng på dessa delar. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del/hela skrivningen.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	-	-	-	-	-	-
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	-	-	-	-	-	-
hela	36		11	12	18	22	26	30

Till exempel krävs för betyg C minst 22 poäng totalt varav 6 poäng på del II.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 4}$ vara vektorrummet av polynom av grad ≤ 4 . Låt $L: V \rightarrow V$ vara operatör $I - \left(\frac{d}{dx}\right)^2$, dvs den som ges av $L(p)(x) = p(x) - p''(x)$. Bestäm Jordans normalform för L . **(4 p)**
2. Låt V vara vektorrummet av kontinuerliga funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ med kompakt stöd, dvs $f(x) = 0$ för alla $|x| > R$ för något R (beroende på f). Ge V den inre produkten $\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)e^x dx$. Låt $L: V \rightarrow V$ vara operatör som ges av $L(f)(x) = f(x+1)$.
 - (a) Bestäm den adjungerade operatör till L . **(2 p)**
 - (b) Avgör för varje $c \in \mathbb{C}$ om cL är självdjungead. **(1 p)**
 - (c) Avgör för varje $c \in \mathbb{C}$ om cL är unitär. **(1 p)**
3. Låt $V = \mathbb{R}^3$ och låt $f: V \times V \rightarrow V$ vara kryssprodukten, dvs $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Eftersom f är bilinjär så ger den upphov till en unik linjär avbildning $L: V \otimes V \rightarrow V$ så att $L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Bestäm en bas för $\ker L$. **(4 p)**

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett vektorrum och låt U och W vara delrum av V .
- (a) Definiera vad det innebär att V är en *inre direkt summa* av U och W . **(1 p)**
 - (b) Definiera *kvotrummet* V/W (du behöver inte bevisa att det är ett vektorrum). **(1 p)**
 - (c) Visa att om $V = U \oplus W$ så finns en isomorfi mellan U och V/W . **(2 p)**
5. Låt V vara ett komplext inre produktrum och låt $L: V \rightarrow V$ vara en operator.
- (a) Definiera vad det innebär att L är *unitär*. **(1 p)**
 - (b) Ge ett exempel på ett inre produktrum V och en linjär operator L så att $\|L(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ utan att L är unitär. **(1 p)**
 - (c) Visa att alla egenvärden till en unitär operator har absolutbelopp 1. **(1 p)**
 - (d) Visa att egenrummen till olika egenvärden till en unitär operator är ortogonala. **(1 p)**

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt A vara 3×3 -matrisen med element i kroppen $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ som ges av:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Låt S vara delrummet av 3×3 -matriser som ges av $S = \{p(A) : p(x) \in \mathbb{F}_3[x]\}$, dvs alla polynom i A med koefficienter i $\mathbb{F}_3$.

- (a) Bestäm antalet element i S . **(2 p)**
 - (b) Avgör om S utgör en kropp (med addition och multiplikation av matriser). **(2 p)**
7. Låt $\ell^2(\mathbb{C})$ vara Hilbertrummet av följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ med $\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ och den inre produkten $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_i} b_i$. Låt $L: \ell^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{C})$ vara operatoren som tar en följd $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ på följden $(a_2, a_0, a_1, a_5, a_3, a_4, a_8, a_6, a_7, \dots)$.
- (a) Avgör om L är självdjungerad och/eller unitär. **(2 p)**
 - (b) Avgör om det finns en ortonormal Hilbert-bas av egenvektorer till L . **(2 p)**
8. Låt X och Y vara $n \times n$ -matriser så att alla trippelprodukter av dem är noll, dvs $X^3 = X^2Y = XYX = YX^2 = Y^2X = YXY = XY^2 = Y^3 = 0$.
- (a) Beräkna $e^X e^Y$ och e^{X+Y} . **(1 p)**
 - (b) Visa att det finns en matris Z så att $e^X e^Y = e^Z$ och ge en explicit formel för Z i termer av X och Y . **(3 p)**
9. Låt V vara ett vektorrum av dimension n , låt $0 < m < n$ och låt $\omega \in \bigwedge^m V$ där $\omega \neq 0$. Vi har en linjär avbildning $L: V \rightarrow \bigwedge^{m+1} V$ där $L(\mathbf{y}) = \omega \wedge \mathbf{y}$. Visa att $\dim(\ker L) = m$ om och endast om $\omega = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_m$ för några vektorer $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m \in V$. **(4 p)**