



KTH Teknikvetenskap

SF1672 Linjär algebra
Tentamen torsdag, 12 januari 2023, 08:00–13:00

Skrivtid: 5 timmar

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av åtta uppgifter. Del I utgörs av fem uppgifter som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av tre uppgifter som testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg.

Bonuspoäng från del I av inlämningsuppgifterna och från quizzarna adderas till erhållna poäng på del I. Bonuspoäng från del II av inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del II. (Bonuspoäng räknas bara under samma läsår.)

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell, där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Del I	16	16	16	16	16	15
Del II	14	11	8	4	–	–

Del II av tentamen rättas inte om mindre än 16 poäng är uppnådda på del I.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden tilldelas inte full poäng.

Del I

1. Tre plan i rummet ges av

$$H_1: x + 3y + z = 1; \quad H_2: 2x + y = 2; \quad H_3: 3x - y - z = 1.$$

- a) Bestäm en parameterform för planet H_1 . (1 p)
- b) Bestäm en parameterform för den linje som ges av skärningen av H_2 med H_3 . (1 p)
- c) Avgör om de tre planen skär varandra i en punkt. (2 p)

2. Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) Bestäm alla egenvärden till A . (1 p)
- b) Bestäm en egenvektor till varje funnet egenvärde. (2 p)
- c) Bestäm en matris B sådan att $B^{-1}AB$ är en diagonalmatris. (1 p)

3. Matrisen till den linjära avbildningen $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ med avseende på basen

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

är

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

- a) Beräkna standardmatrisen till f . (3 p)
- b) Beräkna matrisen $[f]_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}$ till f med avseende på basen

$$\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

OBS: Jämför baserna noggrant så att du kan slippa beräkningar. (1 p)

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- a) Bestäm en ortonormalbas till kolonnrummet $\text{col}(A)$ av A . (2 p)
- b) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{b}$ på kolonnrummet av A . (2 p)

5. På vektorrummet $\mathbf{P}_n$ av alla polynom av grad $\leq n$ definieras en avbildning

$$f: \mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{P}_n$$

genom $f(p)(x) = x^n p(\frac{1}{x})$.

- a) Visa att f är en linjär avbildning. (1 p)
- b) Bestäm avbildningsmatrisen $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ av f med avseende på basen $\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^n\}$. (1 p)
- c) Bestäm $\det(f) = \det([f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}})$. (2 p)

Del II

6. Tre fiskare gör en tävling där var och ens uppdrag är att varje dag fånga lika många fiskar som de andra två fångade tillsammans dagen innan. Den yngsta och minst erfarna fiskaren börjar på dag 0 med en fisk, de andra med noll fiskar.

Bestäm hur många fiskar den yngsta fiskaren måste fånga på dag n , för alla $n \geq 0$.

(6 p)

7. Låt $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ vara två kvadratiske matriser som uppfyller $AB = BA$. Antag att A har n stycken *olika* egenvärden.

a) Visa att varje egenvektor till A är också egenvektor till B . (3 p)

b) Visa att A och B är *simultant diagonaliserbar*, d.v.s. att det finns en matris P sådan att $P^{-1}AP$ och $P^{-1}BP$ är diagonalmatriser. (1 p)

c) Ge ett motexempel till (b) där $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ uppfyller $AB = BA$, A är diagonaliserbar, men där A har multipla egenvärden. (2 p)

8. Låt $S \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ vara en symmetrisk matris. På vektorrummet $V = \mathbf{R}^{2 \times 2}$ ges en funktion $Q: V \rightarrow \mathbf{R}$ av

$$Q(A) = \operatorname{tr}(A^T S A).$$

(Här betecknar $\operatorname{tr} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ spåret $a + d$ av matrisen.)

Kom ihåg att en kvadratisk form på ett vektorrum V är per definition en funktion $Q: V \rightarrow \mathbf{R}$ sådan att $Q(\lambda x) = \lambda^2 x$ och sådan att funktionen $\langle x, y \rangle =_{\text{def}} Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ är linjär i x och i y .

a) Visa att Q är en kvadratisk form på V . (2 p)

b) Visa att Q är positivt (semi-)definit, negativt (semi-)definit respektive indefinit precis om den kvadratiske formen $x \mapsto x^T S x$ på $\mathbf{R}^2$ är det. (4 p)