

SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Lösningsförslag till tentamen
Tisdag den 25 oktober 2022

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem.

(a) $y' - (\tan x)y = e^{-x}$, $y(0) = 1$.

(b) $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$, $y(0) = 1$.

(4 p)

Lösningsförslag.

- (a) Detta är en första ordningens linjär ekvation som kan lösas genom att multiplicera med en integrerande faktor. En sådan integrerande faktor är

$$e^{\int (-\tan x) dx} = \{\text{Formelblad (78)}\} = e^{\ln \cos x} = \cos x.$$

När vi multiplicerar med den integrerande faktorn får vi ekvationen

$$\cos xy' - \cos x \tan xy = \cos xy' - \sin xy = e^{-x} \cos x,$$

där vänsterledet är derivatan av en produkt,

$$(\cos xy)' = e^{-x} \cos x.$$

Vi integrerar detta och får

$$\cos xy = \int e^{-x} \cos x dx = \{\text{Formelblad (107)}\} = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C.$$

Eftersom $y(0) = 1$ har vi

$$1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 - 1) + C = -\frac{1}{2} + C$$

så $C = \frac{3}{2}$ och lösningen till initialvärdesproblemet är

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{-x} (\tan x - 1) + \frac{3}{2 \cos x}.$$

- (b) Ekvationen är

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

med $M(x, y) = 2xy$ och $N(x, y) = x^2 - 1$. Eftersom

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x},$$

och funktionerna $M(x, y)$, $N(x, y)$ är definierade på hela xy -planet som är enkelt sammanhängande så ser vi att detta är en exakt ekvation. Vi bestämmer en potentialfunktion $f(x, y)$ så att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 2xy, \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N = x^2 - 1.$$

När vi integrerar den första av dessa ekvationer får vi

$$f(x, y) = x^2 y + g(y)$$

där $g(y)$ är en obekant funktion som bara beror av y . Insatt i den andra ekvationen ger detta

$$x^2 - 1 = N = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y)$$

eller $g'(y) = -1$. En lösning ges alltså av $g(y) = -y$ och

$$f(x, y) = x^2 y - y = (x^2 - 1)y.$$

Lösningarna till differentialekvationen ges sedan implicit av

$$f(x, y) = (x^2 - 1)y = C$$

för olika värden på konstanten C . I detta fall är det lätt att lösa ut

$$y = \frac{C}{x^2 - 1}.$$

För att initialvillkoret $y(0) = 1$ ska vara uppfyllt måste vi välja $C = -1$, och vi får

$$y = \frac{-1}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

□

2. Följande linjära system av differentialekvationer har en parameter $a \in \mathbb{R}$ som en av koefficienterna,

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + ay(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y(t) \end{cases}.$$

Bestäm ett värde på a för vilket systemet har någon lösning med $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ då $t \rightarrow \infty$. (Detta värde är inte unikt.) För ditt valda värde på parametern a , bestäm alla lösningar som uppfyller $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ då $t \rightarrow \infty$. **(4 p)**

Lösningsförslag. (Kommentar: Det var meningen att det skulle stå: "...för vilket systemet har någon *icketrivial* lösning med $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$...". Som uppgiften är skriven är det förstås korrekt att svara att $(x(t), y(t))$ som är konstant lika med $(0, 0)$ är en sådan lösning för alla a på första frågan.)

Med $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ kan vi skriva systemet på matrisform som

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

där matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Lösningarna och deras egenskaper bestäms av egenvärden och egenvektorer till $\mathbf{A}$. Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(\mathbf{A} - mI) = \det \begin{pmatrix} 1-m & a \\ 4 & 1-m \end{pmatrix} = (m-1)^2 - 4a,$$

så matrisen har egenvärden $m = 1 \pm \sqrt{4a}$. Vi får lösningar med $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ då $t \rightarrow \infty$ om åtminstone ett av egenvärdena är negativt, eller har negativ realdel. Vi väljer $a = 1$, vilket ger $m_1 = 1 - \sqrt{4} = -1$ och $m_2 = 1 + \sqrt{4} = 3$.

Vi räknar vidare med $a = 1$. Då är $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ och en egenvektor $\mathbf{v}$ till egenvärdet $m = -1$ uppfyller

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A} - mI)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 - (-1) & 1 \\ 4 & 1 - (-1) \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v},$$

vilket till exempel har lösningen $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Motsvarande lösning till systemet av differentialekvationer är

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{mt} \mathbf{v} = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Eftersom systemet är linjärt ges alla lösningar som går mot origo av

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

där $C \in \mathbb{R}$ är en konstant.

Med annat val av parameter: Alla val av parameter a för vilket $m = 1 - \sqrt{4a} < 0$ är korrekt. Detta svarar mot $a > 1/4$. För ett sådant a så ges en egenvektor till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ med negativt egenvärde $m = 1 - \sqrt{4a}$ av $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\sqrt{a} \\ 2 \end{pmatrix}$. Lösningar som går mot origo av ges av

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C e^{mt} \mathbf{v} = C e^{(1-\sqrt{4a})t} \begin{pmatrix} -\sqrt{a} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\sqrt{a}e^{(1-\sqrt{4a})t} \\ 2Ce^{(1-\sqrt{4a})t} \end{pmatrix}$$

där $C \in \mathbb{R}$ är en konstant.

□

3. Den homogena ekvationen

$$y'' - 2y' + y = 0$$

har två lösningar $y_1(x) = e^x$ och $y_2(x) = xe^x$. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vi använder metoden med variation av parametrar. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

För variation av parametrar gör vi ansatsen

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x.$$

Derivatan av detta är

$$y' = u_1' e^x + u_2' x e^x + u_1 e^x + u_2 (e^x + x e^x).$$

Vi antar att

$$u_1' e^x + u_2' x e^x = 0$$

så att

$$y' = u_1 e^x + u_2 (e^x + x e^x).$$

Detta ger

$$y'' = u_1' e^x + u_2' (e^x + x e^x) + u_1 e^x + u_2 (2e^x + x e^x).$$

Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} &= y'' - 2y' + y \\ &= u_1' e^x + u_2' (e^x + x e^x) + u_1 e^x + u_2 (2e^x + x e^x) \\ &\quad - 2u_1 e^x - 2u_2 (e^x + x e^x) \\ &\quad + u_1 e^x + u_2 x e^x \\ &= u_1' e^x + u_2' (e^x + x e^x) \end{aligned}$$

Funktionerna $u_1(x), u_2(x)$ ska alltså uppfylla

$$\begin{cases} u_1' e^x + u_2' (e^x + x e^x) &= \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}, \\ u_1' e^x + u_2' x e^x &= 0 \end{cases},$$

eller om vi delar med e^x ,

$$\begin{cases} u_1' + u_2' (1+x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ u_1' + u_2' x &= 0 \end{cases}.$$

Vi löser ut $u_1'(x), u_2'(x)$ och får

$$u_1' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad u_2' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Detta integreras till (se formelblad!)

$$u_1(x) = \sqrt{1-x^2} + C_1, \quad u_2(x) = \arcsin x + C_2.$$

Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså

$$\begin{aligned}y(x) &= u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x \\&= \left(\sqrt{1-x^2} + C_1\right)e^x + (\arcsin x + C_2)xe^x \\&= C_1e^x + C_2xe^x + \left(\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x\right)e^x.\end{aligned}$$

□

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Ekvationen

$$y = cx^5,$$

där $c \in \mathbb{R}$ är en parameter, beskriver en familj av kurvor i planet. Bestäm den differentialekvation (som inte innehåller parametern c) vars lösningsmängd är denna familj av kurvor. Bestäm familjen av ortogonala trajektorier till dessa kurvor, alltså den familj av kurvor som skär de givna kurvorna vinkelrätt i alla punkter.

(4 p)

Lösningsförslag. Derivatan av y med avseende på x är

$$y' = 5cx^4.$$

För att eliminera c delar vi y' med y och får

$$\frac{y'}{y} = \frac{5cx^4}{cx^5} = \frac{5}{x}$$

eller

$$y' = \frac{5y}{x},$$

vilket alltså är differentialekvationen som uppfylls av denna familj av kurvor.

Om lutningen i en punkt för en av dessa kurvor är k , så är lutningen för en vinkelrät kurva lika med $-1/k$. Ekvationen för de ortogonala trajektorierna är alltså

$$y' = -\left(\frac{5y}{x}\right)^{-1} = -\frac{x}{5y}.$$

Detta är en separabel ekvation,

$$5yy' = -x,$$

eller

$$\frac{5}{2}(y^2)' = -\frac{1}{2}(x^2)',$$

som vi integrerar till

$$\frac{5}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C.$$

De ortogonala trajektorierna ges alltså av

$$x^2 + 5y^2 = 2C$$

där $C \in \mathbb{R}$ är en parameter. Detta är en familj av ellipser med centrum i origo.

□

5. Visa att ekvationen

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0, \quad y = y(x),$$

har en reguljär singulär punkt vid $x = 0$. Använd en serieansats av Frobeniustyp för att hitta en lösning till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i serien samt beräkna minst 3 nollskiljda termer. Visa dessutom att denna serieansats inte kan ge en andra linjärt oberoende lösning (du behöver heller inte bestämma en andra lösning). **(4 p)**

Lösningsförslag. (Detta är Bessels ekvation av ordning 1.) Eftersom koefficienten x^2 framför högsta derivatan y'' försvinner vid $x = 0$ är punkten $x = 0$ en singulär punkt. För att undersöka om det är en reguljär singulär punkt skriver vi ekvationen som

$$x^2 y'' + xP(x)y' + Q(x)y = x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

Eftersom $P(x) = 1$ och $Q(x) = x^2 - 1$ båda är analytiska vid $x = 0$ är det en reguljär singulär punkt.

För att hitta serielösningar till ekvationen gör vi ansatsen

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n},$$

där m är ett reellt tal, och vi antar att den första koefficienten $a_0 \neq 0$. Då är

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n-1} \quad \text{och} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n)(m+n-1) x^{m+n-2}.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y \\ &= x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n)(m+n-1) x^{m+n-2} \right) + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n-1} \right) \\ &\quad + x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n)(m+n-1) x^{m+n} \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n+2} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((m+n)(m+n-1) + (m+n) - 1) a_n x^{m+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((m+n)^2 - 1) a_n x^{m+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n+2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ((m+k)^2 - 1) a_k x^{m+k} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{m+k} \\ &= (m^2 - 1) a_0 x^m + ((m+1)^2 - 1) a_1 x^{m+1} + \sum_{k=2}^{\infty} [((m+k)^2 - 1) a_k + a_{k-2}] x^{m+k}. \end{aligned}$$

Eftersom $a_0 \neq 0$ så måste m uppfylla indicialekvationen

$$0 = m^2 - 1.$$

Vilket ger två lösningar

$$m_1 = 1, \quad m_2 = -1.$$

Koefficienterna a_n måste sedan uppfylla

$$((m+1)^2 - 1)a_1 = 0 \quad \text{och} \quad ((m+k)^2 - 1)a_k + a_{k-2} = 0, \quad k \geq 2.$$

Differensen $m_1 - m_2 = 2$ är ett heltal. Teorin för serielösningar för ekvationer med reguljärt singulära punkter säger oss att det alltid finns en lösning med den större roten m_1 till indicialekvationen.

Vi räknar vidare med $m = m_1 = 1$ och får

$$\underbrace{((1+1)^2 - 1)}_{=3}a_1 = 0 \quad \text{och} \quad \underbrace{((1+k)^2 - 1)}_{=k(k+2)}a_k + a_{k-2} = 0, \quad k \geq 2,$$

eller

$$a_1 = 0 \quad \text{och} \quad a_k = -\frac{1}{k(k+2)}a_{k-2}, \quad k \geq 2.$$

Observera att vi kan dela med $k(k+2)$ då $k \geq 2$. Med $a_0 = 1$ får vi

$$a_2 = -\frac{1}{2(2+2)}a_0 = -\frac{1}{8}, \quad a_4 = -\frac{1}{4(4+2)}a_2 = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{192}, \quad \dots$$

Eftersom $a_1 = 0$ har vi

$$a_3 = -\frac{1}{3(3+2)}a_1 = 0, \quad a_5 = -\frac{1}{5(5+2)}a_3 = 0, \quad \dots$$

Vi har alltså hittat en lösning $y_1(x)$ med

$$y_1(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x \left(1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{192}x^4 + O(x^6) \right).$$

Vi undersöker nu om den mindre roten $m_2 = -1$ till indicialekvationen kan ge en lösning. I detta fall ska koefficienterna a_n uppfylla

$$\underbrace{((-1+1)^2 - 1)}_{=-1}a_1 = 0 \quad \text{och} \quad \underbrace{((-1+k)^2 - 1)}_{=k(k-2)}a_k + a_{k-2} = 0, \quad k \geq 2,$$

eller

$$a_1 = 0 \quad \text{och} \quad k(k-2)a_k = -a_{k-2}, \quad k \geq 2.$$

För $k = 2$ måste alltså

$$0 = 2 \cdot 0 \cdot a_2 = -a_0 \neq 0,$$

vilket är omöjligt. Denna ansats med en Frobeniusserie med $m_2 = -1$ kan alltså inte ge en andra linjärt oberoende lösning till differentialekvationen.

□

6. (a) Antag att det autonoma systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases}$$

för $(x, y) = (x(t), y(t))$ har en kritisk punkt i $(0, 0)$. Bevisa att existensen av en lämplig Lyapunovfunktion $E(x, y)$ medför att den kritiska punkten är asymptotiskt stabil. (Du behöver inte behandla det allmänna stabila fallet.)

- (b) Systemet

$$\begin{cases} x' = -x^3 + xy \\ y' = -2x^2 - y^3 \end{cases}$$

har en kritisk punkt i $(0, 0)$. Visa att denna kritiska punkt är asymptotiskt stabil genom att hitta en lämplig Lyapunovfunktion.

(4 p)

Lösningförslag.

- (a) En lämplig Lyapunovfunktion i detta fall ska vara en kontinuerligt deriverbar funktion $E(x, y)$ definierad på en cirkelskiva D runt origo som uppfyller

- (i) $E(x, y) > 0$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ och $E(0, 0) = 0$ i origo.
- (ii) Uttrycket

$$(*) = \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G$$

uppfyller $(*) < 0$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ och $(*) = 0$ för $(x, y) = (0, 0)$.

Antag att det finns en sådan funktion.

Låt C_1 vara randen till cirkelskivan D . Från (i) vet vi att $E(x, y)$ har ett positivt minvärde $m > 0$ på C_1 . Eftersom $E(x, y)$ är kontinuerlig och $E(0, 0) = 0$ så finns det en cirkel C_2 runt origo så att $E(x, y) < m$ innanför C_2 .

Antag att $(x(t), y(t))$ är en lösningskurva för vilken startpunkten $(x(0), y(0))$ ligger innanför C_2 . Från (ii) vet vi att

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G \leq 0$$

så $E(x, y)$ kan inte öka längs lösningskurvan. Eftersom $E(x(0), y(0)) < m$ är alltså $(E(x(t), y(t)) < m$, så lösningen kan inte nå cirkeln C_1 där $E(x, y) \geq m$.

Vi vill visa att origo är en asymptotiskt stabil kritisk punkt, alltså att $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$ för lösningar som startar nära origo. Antag att $(x(t), y(t))$ är en lösningskurva med $(x(0), y(0)) \neq (0, 0)$ innanför C_2 . Då har vi enligt (ii) att $\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) < 0$, så $E(x, y)$ är strikt avtagande. Eftersom $E(x, y) \geq 0$ existerar gränsvärdet $\lim_{t \rightarrow \infty} E(x(t), y(t)) = L \geq 0$. Om $L = 0$ är vi klara eftersom $E(x, y) = 0$ bara för $(x, y) = (0, 0)$ enligt (i). För en motsägelse, anta att $L > 0$. Välj en cirkel C_3 innanför C_2 så att $E(x, y) < L$ för (x, y) innanför C_3 . Då vet vi att lösningskurvan $(x(t), y(t))$ ligger helt och hållet mellan cirkelarna C_1 och C_3 . Eftersom $(*)$ är en kontinuerlig funktion så har den ett maxvärde på det slutna och begränsade området på och mellan cirkelarna C_1 och C_3 , och detta maxvärde är strikt negativt. Vi har alltså $\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) \leq -k$, $k > 0$, för alla $t \geq 0$. Detta ger

$$E(x(s), y(s)) - E(x(0), y(0)) = \int_0^s \frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) dt \leq -k(s - 0) = -ks.$$

När vi sedan låter $s \rightarrow \infty$ får vi $\lim_{s \rightarrow \infty} E(x(s), y(s)) = -\infty$, vilket är en motsägelse då $E(x, y) \geq 0$. Denna motsägelse säger oss att $L > 0$ är omöjligt, så vi måste ha $L = 0$ och vi är klara.

(b) Vi testar med en Lyapunovfunktion på formen

$$E(x, y) = Ax^{2m} + By^{2n}$$

där $A, B > 0$ och m, n är positiva heltal. Med dessa antaganden är $E(x, y)$ alltid en positivt definit funktion. Vi måste välja A, B, m, n så att $E(x, y)$ är strikt avtagande längs lösningskurvor till systemet som startar nära $(0, 0)$. För en sådan lösningskurva beräknar vi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) &= \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G \\ &= 2mAx^{2m-1}(-x^3 + xy) + 2nBy^{2n-1}(-2x^2 - y^3) \\ &= \{\text{Välj } m = n = 1 \text{ så att de blandade termerna blir av samma typ}\} \\ &= -2Ax^4 + (2A - 4B)x^2y - 2By^4. \end{aligned}$$

Eftersom $A, B > 0$ så är första och tredje termen ickepositiva. Om vi väljer $A = 2$ och $B = 1$ så är $2A - 4B = 0$, och den andra termen försvinner. Funktionen

$$E(x, y) = 2x^2 + y^2$$

är alltså positiv definit i origo (den punkten är ett lokalt min), och

$$\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -4x^4 - 2y^4 < 0$$

i alla punkter utom i origo. Vi drar slutsatsen att $(0, 0)$ är en asymptotiskt stabil kritisk punkt.

□