



**Lösningsförslag till Tentamen
6 April 2021**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Givet planet

$$H = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

och linjen

$$\ell = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestäm skärningspunkten mellan ℓ och H .

(4 p)

Lösningsförslag. Vi beräknar en normalvektor till planet H med hjälp av kryssprodukten:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Därmed är H lika med

$$H = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}.$$

Låt $\mathbf{x}$ vara en punkt i ℓ som samtidigt ligger i H . Eftersom $\mathbf{x}$ ligger i ℓ finns det ett (unikt) reellt tal a sådant att

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

För att $\mathbf{x}$ också ligger i H har vi att

$$0 = x_1 + x_2 + x_3 = (1 + a) + 0 + 1 \quad a = -2.$$

Alltså är skärningspunkten lika med

$$\begin{bmatrix} 1 + (-2) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Svar. Skärningspunkten är lika med $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vara vektorer i $\mathbb{R}^4$. Låt $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ vara det linjära höljet av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Bestäm en ortonormerad bas till W och en ortonormerad bas till det ortogonala komplementet $W^\perp$.

(4 p)

Lösningsförslag. Låt

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi observerar att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ är en bas för $\mathbb{R}^4$. Vi använder Gram-Schmidt processen:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &:= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_2 &:= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 \\ &= \mathbf{v}_2 - 0 \\ &= \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_3 &:= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2 \\ &= \mathbf{e}_3 - \mathbf{0} - 1/2 \cdot [0 \ 1 \ 1 \ 0]^T \\ &= 1/2 \cdot [0 \ -1 \ 1 \ 0]^T \\ \mathbf{w}_4 &:= \mathbf{v}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle} \mathbf{w}_3 \\ &= \mathbf{e}_4 - \mathbf{0} - \mathbf{0} - \mathbf{0} \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \end{aligned}$$

Då är $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ en ortogonal bas till W och $\{\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ en ortogonal bas till $W^\perp$. För att erhålla en ortonormal bas behöver vi normalisera vektorerna.

$$\|\mathbf{w}_3\| = 1/2 \cdot \|\mathbf{w}_3\| = 1 \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = 1/2 \cdot \sqrt{2} \text{ och } \|\mathbf{w}_1\| \|\mathbf{w}_4\| = 1.$$

Vi erhåller att

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

är en ortonormal bas för W , och

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

är en ortonormal bas för $W^\perp$.

□

$$\mathbf{Svar.} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ och } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

3. Bestäm alla reella tal $a, b \in \mathbb{R}$ för vilka matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{bmatrix}$$

är diagonaliserbar.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi använder utveckling efter första kolonnen flera gånger för att beräkna det karakteristiska polynomet av M :

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & b & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ b & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2 (1 - \lambda)^2 \end{aligned}$$

vilket visar att egenvärdena är 2 och 1. Den algebraiska multipliciteten av båda egenvärden är lika med 2. Motsvarande egenrum är lika med $M - 2I_4$ respektive $M - I_4$. Gausselimination för $M - 2I_4$ ger

$$M - 2I_4 = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & b & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensionen av egenrummet är lika med icke-pivotkolonnerna. Den tredje och fjärde kolonnerna är pivotkolonnerna. Den andra kolonnen är en pivotkolonn om $a \neq 0$. Därmed är den algebraiska multipliciteten av 2 lika med den geometriska multipliciteten om och endast om $a = 0$. Gausselimination för $M - I_4$ ger

$$M - I_4 = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att första och andra kolonnen är pivotkolonnerna, och att den tredje kolonnen är en pivotkolonn om och endast om $b \neq 0$. Därmed är den algebraiska multipliciteten av 1 lika med den geometriska multipliciteten om och endast om $b = 0$.

Sammanfattat är den algebraiska lika med den geometriska multipliciteten för alla egenvärden om och endast om $a = 0$ och $b = 0$. Alltså är M diagonaliserbar om och endast om $a = 0$ och $b = 0$.

□

Svar. $a = b = 0$.

4. Givet parallelogrammen

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 4x_2 - x_1 \leq 10 \text{ och } 0 \leq x_1 + x_2 \leq 5\}.$$

Bestäm arean av P .

(4 p)

Lösningsförslag. Eftersom

$$\begin{bmatrix} 4x_2 - x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

har vi att $Q = T(P)$ där

$$Q = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq z_1 \leq 10 \text{ och } 0 \leq z_2 \leq 5\}$$

och T är matrisavbildningen av

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom $\det A = (-1) \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -5 \neq 0$ är T inverterbar med inversen $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \mapsto A^{-1}\mathbf{x}$. Vi har $P = T^{-1}(Q)$. Arean av Q är lika med $50 = 10 \cdot 5$ vilket inses lätt eftersom Q är parallell med koordinat-axlarna. Sammanfattat erhåller vi

$$\text{area}(P) = |\det A^{-1}| \text{area } Q = |1/\det A| \text{area } Q = 1/5 \cdot 50 = 10.$$

□

Svar. Arean av P är lika med 10.

5. Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^2$ som ges av

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning med $\mathcal{B}$ -matrisen

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm $[T]_{\mathcal{C}}$ där $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ är standardbasen för $\mathbb{R}^2$.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi använder

$$[T]_{\mathcal{C}} = (P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}})^{-1} [T]_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$$

där $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ betecknar basbyte matrisen som översätter (vanliga) koordinater till koordinater med avseende på bas $\mathcal{B}$. Vi har

$$(P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}})^{-1} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}, [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}] = \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

och därmed

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \frac{1}{13 \cdot 1 - 4 \cdot 1} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}.$$

Därför är

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 52 \\ -3 & 14 \end{bmatrix}$$

□

Svar. $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -11 & 52 \\ -3 & 14 \end{bmatrix}.$

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $\mathbb{P}_2 = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2. Låt $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ vara avbildningen

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2 \\ p(t) &\mapsto p(t+1) - p(t). \end{aligned}$$

- (i) Visa att T är en linjär avbildning. (2 p)
 (ii) Bestäm en bas till nollrummet av T ,

$$\text{Nul } T = \{p(t) \in \mathbb{P}_2 : T(p(t)) = 0\},$$

och en bas till bildrummet av T ,

$$\text{Im } T = \{T(p(t)) \in \mathbb{P}_2 : p(t) \in \mathbb{P}_2\}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Låt $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$. Då har vi

$$T(p(t)) = a_0 + a_1(t+1) + a_2(t+1)^2 - a_0 - a_1t - a_2t^2 = 2a_2t + a_2 + a_1.$$

- (i) Låt $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ och $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$ vara polynom i $\mathbb{P}_2$ och c ett reellt tal. Då gäller

$$\begin{aligned} T(p(t) + q(t)) &= T((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2) \\ &= 2(a_2 + b_2)t + a_2 + b_2 + a_1 + b_1 \\ &= (2a_2t + a_2 + a_1) + (2b_2t + b_2 + b_1) \\ &= T(p(t)) + T(q(t)), \\ T(cp(t)) &= T(ca_0 + ca_1t + ca_2t^2) \\ &= 2ca_2t + ca_2 + ca_1 \\ &= c(2a_2t + a_2 + a_1) \\ &= cT(p(t)). \end{aligned}$$

Alltså är T en linjär avbildning.

(ii) Vi har $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \text{Nul } T$ om och endast om $2a_2t + a_2 + a_1$ är lika med nollpolynomet. Ett polynom är lika med nollpolynomet om alla koefficienter är lika med noll, alltså $T(p(t)) = 0$ om $2a_2 = 0$ och $a_2 + a_1 = 0$. Det gäller om och endast om $a_1 = a_2 = 0$. Det betyder att $p(t) = c$ är ett konstant polynom. Alltså har vi $\text{Nul } T = \{c \cdot 1 : c \in \mathbb{R}\}$ och det konstanta polynomet 1 är en bas till $\text{Nul } T$.

Ett polynom $q(t) \in \mathbb{P}_2$ är i bildrummet om och endast om $q(t) = 2a_2t + a_2 + a_1 = a_2(2t+1) + a_1 \cdot 1$ för godtyckliga reella tal a_2, a_1 . Alltså har vi $\text{Im } T = \text{span}\{2t+1, 1\}$. Eftersom $2t+1$ och det konstanta polynomet 1 inte är multipel av varandra är $\{2t+1, 1\}$ en linjärt oberoende mängd och därmed en bas för $\text{Im } T$. $\square$

Svar. $\{1\}$ och $\{2t+1, 1\}$

7. Låt $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ vara en symmetrisk matris och låt T vara den linjära avbildningen

$$T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ X \mapsto XA.$$

Visa att det finns en bas $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ för $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ och reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ och λ_4 sådana att

$$T(B_i) = \lambda_i B_i$$

för alla $i = 1, 2, 3, 4$.

(6 p)

Lösningsförslag. Låt

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

och låt $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ som ges av

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har

$$T(C_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = aC_1 + bC_2,$$

$$T(C_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = bC_1 + cC_2,$$

$$T(C_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} = aC_3 + bC_4,$$

$$T(C_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = bC_3 + cC_4,$$

och därmed

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} [T(C_1)]_{\mathcal{C}} & [T(C_2)]_{\mathcal{C}} & [T(C_3)]_{\mathcal{C}} & [T(C_4)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{bmatrix}.$$

Eftersom $[T]_{\mathcal{C}}$ är symmetrisk finns enligt Spektralsatsen en (ortonormal) bas $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} \in \mathbb{R}^4$ och reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sådana att

$$[T]_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

för alla $i = 1, 2, 3, 4$. Därmed är

$$T(B_i) = \lambda_i B_i$$

om vi sätter

$$B_i = \mathbf{v}_{i1}C_1 + \mathbf{v}_{i2}C_2 + \mathbf{v}_{i3}C_3 + \mathbf{v}_{i4}C_4$$

□

8. Låt n, m vara naturliga tal och låt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vara en godtycklig vektor. För varje delrum W i $\mathbb{R}^m$ betecknar $\text{proj}_W \mathbf{b}$ den ortogonala projektionen av $\mathbf{b}$ på W .

(i) Låt W vara ett delrum i $\mathbb{R}^m$. Visa att $\text{proj}_W \mathbf{b} = \mathbf{0}$ om och endast om $\mathbf{b} \in W^\perp$.

(3 p)

(ii) För alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ låt

$$W_{\mathbf{v}} = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \text{proj}_{\text{Col } A} \mathbf{b} = \mathbf{v}\}.$$

Bestäm alla vektorer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ sådana att $W_{\mathbf{v}}$ är ett delrum av $\mathbb{R}^{m \times n}$.

(3 p)

Lösningsförslag. (i) Låt $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ vara en ortonormerad bas för W . Då gäller

$$\text{proj}_W \mathbf{b} = \langle \mathbf{b}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \dots + \langle \mathbf{b}, \mathbf{w}_k \rangle \mathbf{w}_k$$

Eftersom $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ är linjärt oberoende har vi alltså $\text{proj}_W \mathbf{b} = \mathbf{0}$ om och endast om $\langle \mathbf{b}, \mathbf{w}_i \rangle = 0$ för alla $1 \leq i \leq k$. Eftersom $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ spänner upp W gäller detta om och endast om $\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = 0$ för alla $\mathbf{v}$ i W vilket betyder att $\mathbf{b} \in W^\perp$.

(ii) Låt $\mathbf{v}$ vara en vektor sådan att $W_{\mathbf{v}}$ är ett delrum. Då är nollmatrisen i $W_{\mathbf{v}}$. Kolonnrummet av nollmatrisen är lika med nollrummet och därmed gäller

$$\text{proj}_{\{0\}} \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Alltså måste $\mathbf{v}$ vara lika med nollvektorn.

Vi använder nu del (i) för att visa att W_0 verkligen är ett delrum.

Låt A, B vara matriser i W_0 med kolonner $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ och $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, och $c \in \mathbb{R}$. Vi ska visa att $A+B$ och cA också ligger i W_0 . Enligt del (i) har vi $\mathbf{b} \in \text{Col } A^\perp$ och $\mathbf{b} \in \text{Col } B^\perp$, alltså $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b} \rangle = 0$ och $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b} \rangle = 0$ för alla $i = 1, \dots, n$. Därmed får vi för alla kolonner $\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i$ att

$$\langle \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b} \rangle = 0 + 0 = 0$$

Därmed ligger $\mathbf{b}$ i $\text{Col}(A+B)^\perp$ och därmed gäller $\text{proj}_{\{0\}} \mathbf{b} = \mathbf{0}$ enligt (i) vilket betyder att $A+B$ ligger i W_0 .

Dessutom,

$$\langle c\mathbf{a}_i, \mathbf{b} \rangle = c\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b} \rangle = c \cdot 0 = 0$$

vilket betyder att $\mathbf{b}$ ligger i $\text{Col}(cA)^\perp$ vilket igen enligt (i) betyder att cA ligger i W_0 .

Vi har alltså visat att $W_{\mathbf{v}}$ är ett delrum om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\square$

Svar. (ii) $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.