



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
9 januari 2019

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	7	8	8	8	8	8
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	0	0	3	6	9	12

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter. Definiera $L: V \rightarrow V$ genom $L(p(x)) = \int_{-x}^x p(t) dt$ för alla $p(x) \in V$. Visa att L är linjär och bestäm en bas för kärnan $\ker(L)$ och en bas för bildrummet $\operatorname{im}(L)$. **(4 p)**

2. Låt $V = C^\infty(\mathbb{R})$ vara de oändligt deriverbara komplexvärda funktionerna på $\mathbb{R}$ med inre produkt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt, \quad \text{för alla } f, g \in V,$$

låt $W = \{f \in V: f(t+1) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ och låt $L: W \rightarrow W$ ges av $L(f) = f'$. Bestäm den adjungerade operatoren $L^\dagger$. **(4 p)**

3. I en Markovkedja ges fördelningen vid tidpunkt $t = n + 1$ av fördelningen vid tidpunkt $t = n$ genom den stokastiska matrisen

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Avgör om $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ existerar och bestäm i så fall gränsvärdet. **(4 p)**

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera begreppen *egenvektor* och *egenvärde* till en linjär operator L på ett vektorrum V . **(1 p)**
- (b) Definiera begreppet *minimalpolynom* för en linjär operator L på ett vektorrum V och visa att alla egenvärden till L måste vara nollställen till minimalpolynomet om L har ett minimalpolynom. **(1 p)**
- (c) Visa att alla operatorer på V har ett minimalpolynom om $\dim V < \infty$ och ge ett exempel på en operator på ett oändligdimensionellt vektorrum som saknar minimalpolynom. **(2 p)**
5. (a) Vad menas med att en operator L på ett komplext inre-produktrum är *unitär*? **(1 p)**
- (b) Ge exempel på en linjär operator L på ett komplext inre-produktrum V som uppfyller $\|L(x)\| = \|x\|$ för alla x i V utan att L är unitär. **(1 p)**
- (c) Visa att $\exp(iH)$ är unitär om H är en självadjungerad operator och $\exp(iH)$ är väldefinierad. **(2 p)**

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. En följd av 2×2 -matriser $\{X_i\}_{i \geq 0}$ definieras rekursivt av

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad X_{n+1} = 3X_n - 2X_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Bestäm en explicit formel för X_n . **(4 p)**

7. Låt $V = \mathbb{C}^n$ med bas $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Bestäm rangen av den linjära avbildningen

$$L: \bigwedge^2 V \longrightarrow \bigwedge^3 V$$

som ges av $L(x) = x \wedge (e_1 + e_2 + \dots + e_n)$, för $x \in \bigwedge^2 V$. **(4 p)**

8. För heltal $n \geq 1$ låt P_n vara vektorrummet av polynom av grad högst n med komplexa koefficienter. Definiera $L: P_n \longrightarrow P_n$ genom

$$L(p(x)) = p(x+1) - 2p(x) + p(x-1), \quad \text{för alla } p(x) \in P_n.$$

Visa att L är nilpotent och bestäm Jordans normalform för L . **(4 p)**

9. Visa att en operator L på ett vektorrum V som uppfyller $L^2 = I$ är diagonaliserbar, oavsett om $\dim V$ är ändlig eller inte, under förutsättning att $1 + 1 \neq 0$ i den kropp som utgör skalärerna för V . (*Ledning:* Betrakta operatorerna $L_1 = \frac{1}{2}(I + L)$ och $L_2 = \frac{1}{2}(I - L)$.)

Detta ger att en operator som är både unitär och självadjungerad måste vara diagonaliserbar. Varför? **(4 p)**