

Tentamen del 2

Numeriska metoder SF1544 och BE3003

8.00-11.00 2/6 2020

Skriv ditt namn och personnummer på varje inlämnad sida.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Det finns två varianter av uppgift 2. Endast en av dem får lösas.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng, av maximalt 50 poäng på del 2.

- 1a. (5p) Skriv upp det linjära ekvationssystem som ska lösas om randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -u''(x) + xu(x) &= x^2, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, u(1) = 0, \end{aligned} \tag{A}$$

diskretiseras med finita differensmetoden och fyra lika långa delintervall.

Vi betecknar finita differenslösningen u_i , där $u_i \approx u(x_i)$ och $x_i = i \times h$ med steglängd $h = 1/4$. Finit differensapproximation av andraderivatatan ger ekvationerna

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + x_i u_i = x_i^2,$$

för $i = 1, 2, 3$. Med användning av randvillkoren $u_0 = 0$ och $u_4 = 0$ kan ekvationssystemet skrivas $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + x_1 & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + x_2 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

-
- 1b. (7p) Skriv ett Matlab-program som beräknar en approximation av $u(1/2)$, där u är lösningen till randvärdesproblemet (A). För full poäng krävs att programmet testat noggrannheten för att se till att felet i approximationen har ett absolutbelopp som maximalt är 10^{-5} .

N=10;

```

umitt=5;
umittgammal=6;
iter=0;
while abs(umitt-umittgammal)>1e-5
    umittgammal=umitt;
    h=1/N;
    x=(h:h:1-h)';
    A=diag(-1/h^2*ones(1,length(x)-1),-1) ...
        +diag(2/h^2+x)+diag(-1/h^2*ones(1,length(x)-1),1);
    b=x.^2;
    u=A\b;
    umitt=u(N/2);
    N=2*N;
    if iter == 0
        umittgammal=umitt+1;
    end
    iter=iter+1;
end

disp(['Losningen i mitten av intervallet = ', num2str(umitt)])

```

1c. (4p) Beskriv en algoritm för beräkning av $v(1/2)$, där v är en lösning till randvärdesproblemet

$$\begin{aligned}
 -v''(x) + xv(x) &= x^2 + \frac{\sin(v(x))}{10}, \quad 0 < x < 1, \\
 v(0) &= 0, v(1) = 0,
 \end{aligned}$$

dvs. samma problem som (A) fast med en liten icke linjär term tillagd.

Om finita differensmetoden används för diskretisering av randvärdesproblemet får vi ett icke linjärt ekvationssystem som kan skrivas $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, där $\mathbf{v}$ är vektorn som innehåller finita differenslösningen och element i , där $1 \leq i \leq N - 1$, av funktionen $\mathbf{F}$ ges av

$$F_i = -\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} + x_i v_i - x_i^2 - \frac{\sin v_i}{10}.$$

Liksom tidigare gäller att randvillkoren ger att $v_0 = 0$ och $v_N = 0$. Ekvationen $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ kan lösas med Newtons metod

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n - \mathbf{h}^n,$$

där stegvektorn $\mathbf{h}^n$ löser det linjära ekvationssystemet $J(\mathbf{v}^n)\mathbf{h}^n = \mathbf{F}(\mathbf{v}^n)$ och J är Jacobimatrisen som ges av den tridiagonala matrisen

$$J(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + x_1 - \frac{\cos v_1}{10} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + x_2 - \frac{\cos v_2}{10} & -\frac{1}{h^2} & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Som startvektor $\mathbf{v}^0$ till Newtons metod kan väljas lösningen till det linjära problemet från uppgift 1b.

1d. (4p) Skriv ett Matlab-program som implementerar din algoritm från **1c**.

Matlabprogrammet nedan är en påbyggnad till programmet som löser uppgift 1b.

N=10;

```
umitt=5;
umittgammal=6;
iter=0;
while abs(umitt-umittgammal)>1e-5
    umittgammal=umitt;
    h=1/N;
    x=(h:h:1-h)';
    A=diag(-1/h^2*ones(1,length(x)-1),-1) ...
        +diag(2/h^2+x)+diag(-1/h^2*ones(1,length(x)-1),1);
    b=x.^2;
    u=A\b;
    umitt=u(N/2);
    N=2*N;
    if iter == 0
        umittgammal=umitt+1;
    end
    iter=iter+1;
end
```

```
% Newtons metod
N=N/2;
v=u;
vmitt=v(N/2);
vmittgammal=vmitt+1;
```

```

while abs(vmitt-vmittgammal)>1e-5
    vmittgammal=vmitt;
    J=diag(-1/h^2*ones(1,length(x)-1),-1) ...
        +diag(2/h^2+x-cos(v)/10)+diag(-1/h^2*ones(1,length(x)-1),1);
    F=zeros(N-1,1);
    F(1)=-(-2*v(1)+v(2))/h^2+x(1)*v(1)-x(1)^2-sin(v(1))/10;
    F(N-1)=-(v(N-2)-2*v(N-1))/h^2+x(N-1)*v(N-1)-x(N-1)^2-sin(v(N-1))/10;
    for i=2:N-2
        F(i)=-(v(i-1)-2*v(i)+v(i+1))/h^2+x(i)*v(i)-x(i)^2-sin(v(i))/10;
    end
    v=v-J\F;
    vmitt=v(N/2);
end

disp(['Losningen i mitten av intervallet = ', num2str(vmitt)])

```

2a. (5p) Funktionen $f(x, y, z)$ uppfyller

$$f(4.00, 2.00, 1.00) = 6.5,$$

$$f(4.03, 2.00, 1.00) = 6.2,$$

$$f(4.00, 1.98, 1.00) = 6.6,$$

$$f(4.00, 1.98, 1.04) = 6.8,$$

$$f(4.00, 2.00, 1.04) = 6.7.$$

Vad ger experimentell störningsräkning (linjär approximation) för felgräns till $v = f(x, y, z)$ om $x = 4.00 \pm 0.03$, $y = 2.00 \pm 0.02$ och $z = 1.00 \pm 0.04$?

Direkt användning av experimentell störningsräkning ger den approximativa felgränsen

$$\begin{aligned}
 & |f(4.03, 2.00, 1.00) - f(4.00, 2.00, 1.00)| \\
 & + |f(4.00, 1.98, 1.00) - f(4.00, 2.00, 1.00)| \\
 & + |f(4.00, 2.00, 1.04) - f(4.00, 2.00, 1.00)| = 0.6
 \end{aligned}$$

2b. (5p) Funktionen $g(a, b, c)$ uppfyller

$$\begin{aligned} g(5.00, 7.00, 4.00) &= 2.5, \\ g(5.01, 7.00, 4.00) &= 2.45, \\ g(5.00, 7.01, 4.00) &= 2.6, \\ g(5.00, 7.00, 4.01) &= 2.6. \end{aligned}$$

Vad ger experimentell störningsräkning (linjär approximation) för felgräns till $w = g(a, b, c)$ om $a = 5.00 \pm 0.04$, $b = 7.00 \pm 0.02$ och $c = 4.00 \pm 0.03$?

Den linjära approximationen av g runt $(5, 7, 4)$ ges av

$$g(5, 7, 4) + k_a(a - 5) + k_b(b - 7) + k_c(c - 4).$$

Konstanterna k_a , k_b och k_c tas som approximationer av $\frac{\partial g}{\partial a}$, $\frac{\partial g}{\partial b}$ och $\frac{\partial g}{\partial c}$ respektive, och kan beräknas via differensapproximationerna

$$\begin{aligned} k_a &= \frac{g(5.01, 7.00, 4.00) - g(5.00, 7.00, 4.00)}{0.01} = -5, \\ k_b &= \frac{g(5.00, 7.01, 4.00) - g(5.00, 7.00, 4.00)}{0.01} = 10, \\ k_c &= \frac{g(5.00, 7.00, 4.01) - g(5.00, 7.00, 4.00)}{0.01} = 10. \end{aligned}$$

Det största värdet den linjära approximationen antar inom de givna gränserna för a , b och c erhålls när $a = 4.96$, $b = 7.02$ och $c = 4.03$. Därmed blir feluppskattningen

$$5 \cdot 0.04 + 10 \cdot 0.02 + 10 \cdot 0.03 = 0.7.$$

2c. (5p) Funktionen $h(\alpha, \beta, \gamma)$ uppfyller

$$\begin{aligned} h(3.00, 1.00, 2.00) &= 5.0, \\ h(3.02, 1.00, 2.00) &= 5.1, \\ h(3.00, 1.01, 2.01) &= 5.1, \\ h(3.00, 1.01, 1.99) &= 5.2. \end{aligned}$$

Vad ger experimentell störningsräkning (linjär approximation) för felgräns till $\xi = h(\alpha, \beta, \gamma)$ om $\alpha = 3.00 \pm 0.03$, $\beta = 1.00 \pm 0.02$ och $\gamma = 2.00 \pm 0.04$?

Den linjära approximationen av h runt $(3, 1, 2)$ ges av

$$h(3, 1, 2) + k_\alpha(\alpha - 3) + k_\beta(\beta - 1) + k_\gamma(\gamma - 2).$$

Konstanten k_α bestäms med finit differens-approximation liksom i uppgift 3b:

$$k_\alpha = \frac{h(3.02, 1.00, 2.00) - h(3.00, 1.00, 2.00)}{0.02} = 5.$$

Konstanterna k_β och k_γ får vi genom att använda punkterna med koordinater (3.00, 1.01, 2.01) och (3.00, 1.01, 1.99) i den linjära approximationen. Detta leder till ekvationssystemet

$$5 + 0.01k_\beta + 0.01k_\gamma = 5.1,$$

$$5 + 0.01k_\beta - 0.01k_\gamma = 5.2,$$

med lösning $k_\beta = 15$ och $k_\gamma = -5$. Det största värdet den linjära approximationen antar inom de givna gränserna för α , β och γ erhålls när $\alpha = 3.03$, $\beta = 1.02$ och $\gamma = 3.97$. Därmed blir feluppskattningen

$$5 \cdot 0.03 + 15 \cdot 0.02 + 5 \cdot 0.04 = 0.65.$$

Alternativ uppgift 2. (15p) Formulera och bevisa en sats om existens och entydighet av polynom interpolerande n punkter.

Se t.ex. Sats 3.2 i läroboken av Sauer.

3. Betrakta fixpunktsiterationen

$$x_{n+1} = x_n^2 + x_n. \tag{B}$$

- 3a.** (7p) För vilka startpunkter x_0 kommer fixpunktsiterationerna (B) att konvergera till en fixpunkt?

Det finns endast en fixpunkt, $x = 0$. Om startpunkten $x_0 > 0$ så gäller $x_1 > x_0$. Vi får därför ingen konvergens till $x = 0$. Om $x_0 < -1$ så är $x_1 > 0$. Därför får vi ingen konvergens till fixpunkten. Om $x_0 = -1$ är $x_1 = 0$ och vi har konvergens i ett steg. Om $-1 < x_0 < 0$ har vi att $x_1 > x_0$ och $x_1 < 0$. Vi har alltså att talföljden $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ är växande och uppåt begränsad. Den måste därför vara konvergent. Man kollar enkelt att gränsvärdet måste vara $x = 0$.

Slutsats: Fixpunktsiterationerna konvergerar för alla $-1 \leq x_0 \leq 0$.

- 3b.** (8p) För alla startpunkter x_0 sådana att fixpunktsiterationerna konvergerar till en fixpunkt α , ge en feluppskattning av felet i iterationssteg n , dvs. $|x_n - \alpha|$.

För $x_0 = -1$ och $x_0 = 0$ konvergerar fixpunktsiterationerna i ett steg. Antag därför att $-1 < x_0 < 0$. Eftersom fixpunkten $\alpha = 0$ gäller $|x_n - \alpha| = |x_n|$. Vi kan skriva fixpunktsiterationen (B)

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n^2} = 1.$$

Genom att summera denna identitet får vi

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n^2} = N.$$

Summan i vänsterledet är en under-Riemannsumma till integralen

$$\int_{x_0}^{x_N} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_N}.$$

Vi har därför

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_N} \geq N,$$

vilket eftersom $x_N < 0$ innebär att

$$|x_N| \leq \frac{1}{N - 1/x_0}.$$