



SF1672 Linjär algebra
Tentamen
6 April 2021

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Katharina Jochemko

Tentamen består av åtta uppgifter. Del I utgörs av de fem första uppgifterna (Uppgift 1 - 5) som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Varje uppgift i del I ger 4 poäng. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna (Uppgift 6 - 8) och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift i del II ger 6 poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna och quizzarna adderas till erhållna poäng på del I. (Bonuspoäng räknas bara under samma läsår.) Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I (1-5)	20	Grundläggande problem	15	16	16	16	16	16
II (6-8)	18	Avancerade problem	0	0	4	8	11	14

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden ska inte få full poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Givet planet

$$H = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

och linjen

$$\ell = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestäm skärningspunkten mellan ℓ och H .**(4 p)**

2. Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vara vektorer i $\mathbb{R}^4$. Låt $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ vara det linjära höljet av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Bestäm en ortonormerad bas till W och en ortonormerad bas till det ortogonala komplementet $W^\perp$.

(4 p)

3. Bestäm alla reella tal $a, b \in \mathbb{R}$ för vilka matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{bmatrix}$$

är diagonaliserbar.

(4 p)

4. Givet parallelogrammen

$$P = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 4x_2 - x_1 \leq 10 \text{ och } 0 \leq x_1 + x_2 \leq 5 \} .$$

Bestäm arean av P .

(4 p)

5. Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^2$ som ges av

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning med $\mathcal{B}$ -matrisen

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Bestäm $[T]_{\mathcal{C}}$ där $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ är standardbasen för $\mathbb{R}^2$.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $\mathbb{P}_2 = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2. Låt $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ vara avbildningen

$$T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2 \\ p(t) \mapsto p(t+1) - p(t) .$$

(i) Visa att T är en linjär avbildning.

(2 p)

(ii) Bestäm en bas till nollrummet av T ,

$$\text{Nul } T = \{p(t) \in \mathbb{P}_2 : T(p(t)) = 0\} ,$$

och en bas till bildrummet av T ,

$$\text{Im } T = \{T(p(t)) \in \mathbb{P}_2 : p(t) \in \mathbb{P}_2\} .$$

(4 p)

7. Låt $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ vara en symmetrisk matris och låt T vara den linjära avbildningen

$$T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ X \mapsto XA .$$

Visa att det finns en bas $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ för $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ och reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ och λ_4 sådana att

$$T(B_i) = \lambda_i B_i$$

för alla $i = 1, 2, 3, 4$.

(6 p)

8. Låt n, m vara naturliga tal och låt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vara en godtycklig vektor. För varje delrum W i $\mathbb{R}^m$ betecknar $\text{proj}_W \mathbf{b}$ den ortogonala projektionen av $\mathbf{b}$ på W .

(i) Låt W vara ett delrum i $\mathbb{R}^m$. Visa att $\text{proj}_W \mathbf{b} = \mathbf{0}$ om och endast om $\mathbf{b} \in W^\perp$.

(3 p)

(ii) För alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ låt

$$W_{\mathbf{v}} = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \text{proj}_{\text{Col } A} \mathbf{b} = \mathbf{v}\}.$$

Bestäm alla vektorer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ sådana att $W_{\mathbf{v}}$ är ett delrum av $\mathbb{R}^{m \times n}$. **(3 p)**
