



SF1672 (SF1604) Linjär Algebra
Tentamen
Fredagen 6 april, 2018

Skrivtid: 8:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av två delar; A och B, som vardera ger maximalt 20 poäng*. Erhållna bonuspoäng adderas till del A såvitt inte totalsumman på del A överstiger 20 poäng.

*Uppgift 4b) (2p) tas bort, och ursprungliga betygsgränser ändras med två poäng.

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Preliminära	32	28	24	20	18	17
Betygsgränser	30	26	22	18	16	15

DEL A

1. Låt triangeln T ha hörn

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm en ekvation för planet H som innehåller T . (2 p)
- (b) Bestäm arean av triangeln T . (2 p)
- (c) Bestäm en punkt som har avståndet 5 till planet H . (2 p)

2. Planet V i $\mathbb{R}^3$ ges av ekvationen $2x + 3y + 5z = 0$. Avbildningen $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ges av

$$T(\vec{x}) = 2 \operatorname{Proj}_V(\vec{x}) - \vec{x}.$$

- (a) Bestäm en matrisrepresentation A av avbildningen T . (2 p)
- (b) Beräkna A^2 . (2 p)
- (c) Bestäm alla egenvektorer och egenvärden till T . (2 p)

3. I $\mathbb{R}^4$ har vi vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Delrummet V har baser $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ och $\gamma = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

- (a) Bestäm vektorn $\vec{x}$ när $[\vec{x}]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. (2 p)
- (b) Bestäm $[\vec{x}]_\beta$ när vektorn $\vec{x}$ är som i a). (2 p)
- (c) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $V^\perp$. (2 p)
- (d) Bestäm ett ekvationssystem vars lösningsmängd är V . (2 p)

DEL B

4. Låt V vara vektorrummet av (2×2) -matriser, och låt

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \mid a_{1,2} + a_{2,1} = 0 \right\}.$$

Med $\text{Trace}(A)$ menas spåret till matrisen.

- (a) Visa att $\langle A, B \rangle = \text{Trace}(AB)$ inte definierar en inreprodukt på V . (2 p)
5. Låt A vara en $(n \times n)$ -matris, och låt I vara identitetsmatrisen. Visa att det finns skalärer $c_1, \dots, c_m$, för något $m > 0$, sådana att (4 p)

$$A^m + c_1 A^{m-1} + \dots + c_{m-1} A + c_m I = 0.$$

6. Låt V vara vektorrummet av $(n \times n)$ -matriser, och låt $F: V \rightarrow V$ den linjära avbildningen $F(A) = A + A^T$, där A^T är transponatet till matrisen A . Avgör om avbildningen F är diagonaliserbar. (6 p)
7. Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ och $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ vara två inreprodukt strukturer på ett ändligt dimensionellt vektorrum V . Visa att det finns en linjär avbildning $T: V \rightarrow V$ sådan att

$$\langle x, y \rangle_1 = \langle T(x), y \rangle_2$$

för alla x och y i V . (6 p)