

SK1104 Klassisk fysik

Lösningsförslag till tentamen

Måndagen den 9 juni, 2023, 08:00-10:30

Del A - 1p per deluppgift

1. a) Enligt Faradays lag induceras det en spänning och en ström i en sluten slinga när det magnetiska flödet genom slingan *ändras*. Vidare säger Lenz lag att strömmen försöker att motverka flödesändringen. Det korrekta svaret blir då:

4. Strömmen i slingan går moturs när den passerar ut ur magnetfältet.

b) Vi börjar med att beräkna ersättningskapacitansen för de två respektive tre seriekopplade kapacitanser C som befinner sig i den parallellkopplade grenen av kretsen. Vi får då att:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}C$$

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \Rightarrow C_3 = \frac{1}{3}C$$

Den totala ersättningskapacitansen för de båda parallellkopplade delarna av kretsen blir således

$$C_p = C_2 + C_3 = \frac{1}{2}C + \frac{1}{3}C = \frac{5}{6}C$$

Detta gör att vi slutligen har att C_p och C är seriekopplade, vilket ger att den totala ersättningskapacitansen C_{tot} får ut

$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_p} + \frac{1}{C} \Rightarrow C_{tot} = \frac{C_p C}{C_p + C} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 1}{\frac{5}{6} + 1} C = \frac{5}{11} C$$

Insättning av värden ger slutligen att $C_p = 4,5 \text{ nF}$.

c) Vid uppladdning av en kondensator gäller att

$$Q = Q_{max} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Enligt uppgiften är vi intresserade av fallet $Q = Q_{max}/2$, vilket betyder att

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow t = -RC \ln \frac{1}{2} = RC \ln 2$$

Insättning av värden ger att

$$t = 1,00 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-6} \cdot \ln 2 \text{ s} = 28 \text{ ms}$$

Del B - 4p per uppgift

2. a) För att kunna få en spänning mellan elektroderna krävs ett elektriskt fält mellan elektroderna. Ett elektriskt fält kräver i sin tur att det finns en laddningsskillnad mellan de båda sidorna på röret. Laddningsskillnaden uppkommer genom att det pålagda magnetfältet ger en kraft på laddade partiklar i rörelse. I detta fall har vi saltvatten som innehåller både positivt och negativt laddade joner som påverkas av magnetfältet. Den magnetiska kraften på en laddad partikel är

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

I jämvikt med ett elektriskt fält är den totala kraften som verkar på de laddade partiklarna

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{v}$$

Eftersom $\vec{B} \perp \vec{v}$ i vår geometri, fås att $E = Bv$ mellan elektroderna, vilket betyder att spänningen mellan elektroderna approximativt blir

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V_{ab} = El = Bvl$$

I vårt fall är avståndet mellan elektroderna $l = D$, vilket ger att

$$D = \frac{V_{ab}}{Bv} \Rightarrow D = \frac{4,5 \cdot 10^{-3}}{120 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5} \text{ m} = 7,5 \text{ cm}$$

b) Om vi inför ett koordinatsystem där $\vec{v} = v\hat{x}$ pekar i vattenflödets riktning och $\vec{B} = B\hat{z}$ pekar från den magnetiska nordpolen mot den magnetiska sydpolen (nedåt i papperets plan i figuren), har vi att det elektriska fältet

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v} = B\hat{z} \times v\hat{x} = vB\hat{y}$$

Med riktningsarna $\hat{x}$ och $\hat{z}$ definierade som ovan, kommer $\hat{y}$ och således även det elektriska fältet E att ligga i riktning från elektrod V_1 mot elektrod V_2 i figuren. Eftersom det elektriska fältet går från positiva laddningar till negativa laddningar, finns ett överskott av positiva laddningar vid V_1 . Detta betyder då att $V_1 > V_2$.

c) Nej. För att denna effekt ska kunna uppstå, krävs att det finns laddade partiklar vars rörelse kan påverkas av det pålagda magnetfältet. Alla kvävgasmolekyler är neutralt laddade och därför kan inte laddningarna separeras mellan elektroderna.

d) I härledningen ovan förutsattes ideala geometrier. I verkligheten är detta inte fallet och i en verklig situation måste även följande faktorer hanteras:

- Flödes hastigheten är inte konstant över tvärsnittsytan av röret utan är lägre vid rörets väggar och störst i rörets mitt.
- I verkliga flödesmätare är magneten mindre och då blir inte längre magnetfältet helt homogent.

- Flödets variation över tvärsnittsytan och den cirkulära geometrin medför att det elektriska fältets storlek kommer att variera i olika punkter mellan elektroderna.

Tillsammans medför detta att flödesmätaren behöver kalibreras och en experimentellt framtagen konstant K behöver introduceras i ekvationen.

3. Om spänningen mellan punkterna a och b alltid ska vara noll, måste potentialen i punkterna vara densamma oberoende av spänningskällans frekvens. Inför de komplexa impedanserna $Z_1 = R_1$, $Z_2 = 1/j\omega C$, $Z_3 = j\omega L$ och $Z_4 = R_2$. Spänningsdelning i de båda parallellkopplade grenarna av kretsen ger då att de komplexa potentialerna

$$\check{V}_a = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \check{V} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} \check{V} = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} \check{V}$$

$$\check{V}_b = \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \check{V} = \frac{R_2}{j\omega L + R_2} \check{V} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R_2}} \check{V}$$

Villkoret att potentialerna är desamma medför att

$$\check{V}_a = \check{V}_b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R_2}} \quad \Rightarrow \quad R_1 C = \frac{L}{R_2}$$

Härifrån kan vi lösa ut R_2 och vi får att

$$R_2 = \frac{L}{R_1 C} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} \Omega = 40 \Omega$$

4. Vi börjar med att beräkna det elektriska fältet längs med x -axeln från den av ebonitstavarna som ligger ligger i origo. Eftersom laddningen är jämnt fördelad över staven, har vi att varje element dx av staven har en laddning

$$dq = \frac{Q}{2a} dx$$

Bidraget till det elektriska fältet i punkten x_0 från detta element blir då

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a (x_0 - x)^2} dx$$

Integration över alla bidrag till det elektriska fältet längs med ebonitstaven ger

$$E = \int_{-a}^a \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a (x_0 - x)^2} dx = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{1}{x_0 - x} \right]_{-a}^a = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{x_0 - a} - \frac{1}{x_0 + a} \right)$$

När vi nu vet hur stort det elektriska fältet från den ena ebonitstaven är, kan vi beräkna den totala kraften som detta elektriska fält ger på den andra ebonitstaven genom att betrakta bidraget till kraften på vardera del av staven. Vi får

då att

$$dF = E dq = E \cdot \frac{Q}{2a} dx \quad \Rightarrow \quad F = \int_{b-a}^{b+a} \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx$$

Integreringen ger nu att

$$\begin{aligned} F &= \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} [\ln(x-a) - \ln(x+a)]_{b-a}^{b+a} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left[\ln\left(\frac{b}{b+2a}\right) - \ln\left(\frac{b-2a}{b}\right) \right] = \\ &= \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \ln\left(\frac{b^2}{(b+2a)(b-2a)}\right) = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \ln\left(\frac{b^2}{b^2-4a^2}\right) \end{aligned}$$

Insättning av värden ger slutligen att

$$F = \frac{(-500 \cdot 10^{-9})^2}{16\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 0,05^2} \ln\left(\frac{0,12^2}{0,12^2 - 4 \cdot 0,05^2}\right) \text{ N} = 0,27 \text{ N}$$