

Tentamen i Hållfasthetslära grundkurs med energimetoder (SE1055), 2 juni, 2023

Resultat finns på Mina Sidor senast den 30 juni, 2023.

Hjälpmedel: Formelsamling i hållfasthetslära, matematisk handbok och räknedosa.

Examinator: Peter Gudmundson, 076 213 2254

OBS! Skriv endast på en sida av bladen.

Skriv tydligt namn, program och personnummer på varje blad.

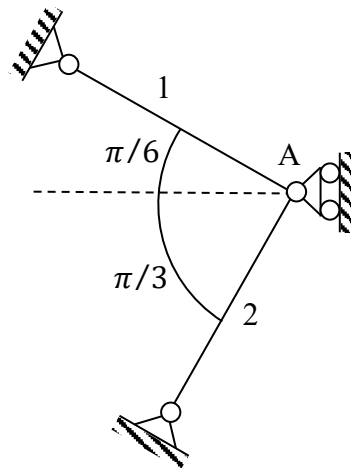
Rita gärna figurer i färg men ej med rödpenna.

Exakt metod ska användas för lösning om inte annat anges i uppgiften

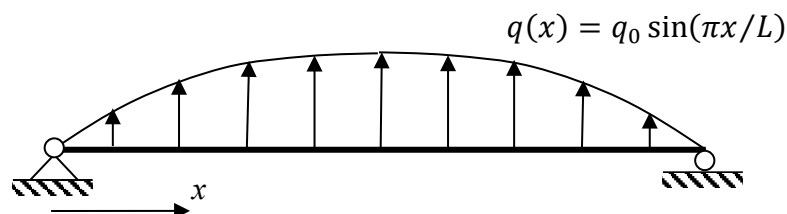
Betygsgränser: F: 0 - 11; FX: 12 - 13; E: 14 - 17; D: 18 - 21; C: 22 - 24; B: 25 - 28;

A: 29 - 40. FX = möjlig komplettering till E. Maximum 4 bonuspoäng.

1. Två stänger (1, 2) med längden L , styvheten EA och längdutvidgningskoefficienten α är sammankopplade enligt Figur. Knutpunkten A kan glida fritt i vertikal led. Initialt är stängerna spänningsfria. Temperaturen i stång 1 höjs sedan med ΔT . Stången 2 behåller sin initiala temperatur. Beräkna normalkraften i stång 1 efter temperaturhöjningen. (6p)

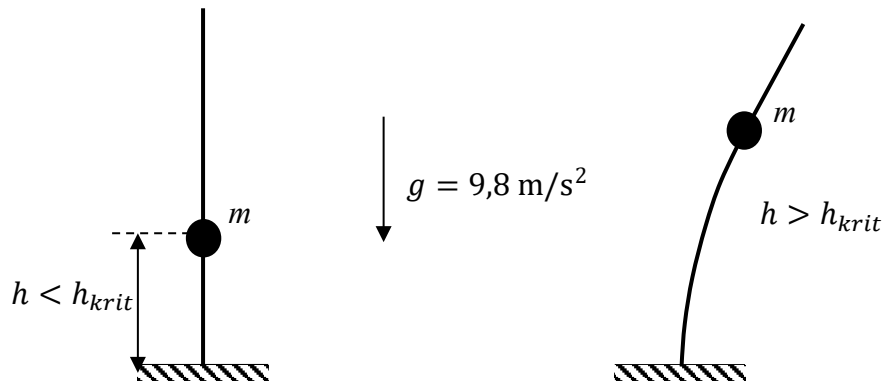


2. En balk med längden L och böjstyvheten EI är belastad med en utbredd kraft per längdenhet $q(x) = q_0 \sin(\pi x/L)$ där q_0 är känd, se Figur. Beräkna utböjningen i mitten av balken. (6p)

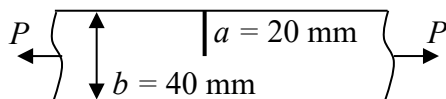


3. En tunn plåt i x, y -planet är belastad med normalspänningen $\sigma_x = 400$ MPa och skjuvspänningen $\tau_{xy} = 120$ MPa. Töjningen i y -led är noll ($\epsilon_y = 0$) och de fria ytorna på plåten är spänningsfria. Styvheten definieras av E-modulen $E = 210$ GPa och Poissons tal $\nu = 0,3$. Materialet kan beskrivas med Trescas hypotes och det har sträckgränsen $\sigma_s = 500$ MPa. Avgör om plastisk deformation initieras eller ej. Svaret måste motiveras. (6p)

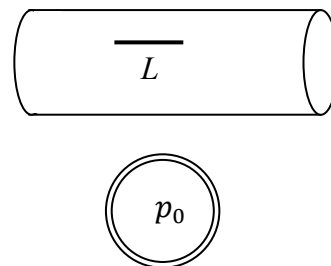
4. En apa klättrar upp i ett träd. Vid en viss kritisk höjd kommer trädet att kraftigt böjas ut. Uppgiften är att uppskatta den kritiska höjden h_{krit} , se Figur. Följande förenklingar görs: Trädet antas ha ett konstant cirkulärt tvärsnitt med diametern 8 cm och E-modulen $E = 12 \text{ GPa}$ (furu). Apans vikt uppskattas till $m = 30 \text{ kg}$. (6p)



5. Brottmekaniska prov har genomförts på en lång tunn stålplåt med bredden $b = 40 \text{ mm}$, tjockleken 1 mm och en kantspricka med längden $a = 20 \text{ mm}$. Brottlasten uppmättes till $P = 3,0 \text{ kN}$, se Figur a. Samma stålplåt används för att tillverka rör med radie på 25 mm. Man räknar med att kunna upptäcka longitudinella genomgående sprickor med längder $L \geq 10 \text{ mm}$ innan användning se Figur b. Uppskatta det kritiska inre övertryck p_0 som kan appliceras. Det antages att linjär brottmekanik kan tillämpas. (6p)



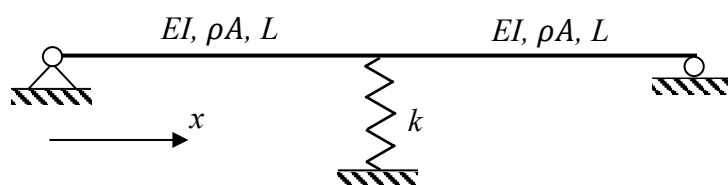
Figur a



Figur b

6. En balk med längden $2L$, böjstyvheten EI och massan per längdenhet ρA är fritt upplagd i båda ändar. Mitt på balken är förbunden med en styvhet med fjäderkonstanten k ($F = k\Delta$), se Figur. På grund av symmetri med avseende på $x = L$ beskrivs egensvängningar av symmetriska och antisymmetriska svängningsformer. Bestäm fjäderkonstanten k så att den lägsta egenfrekvensen för symmetriska respektive antisymmetriska svängningsformer sammanfaller. (6p)

Ledning: Eftersom utböjningen $w(L) = 0$ för antisymmetriska svängningsformer, kommer motsvarande egenfrekvenser inte att påverkas av styvheten k .



Lösungen Kurbanov 2023-06-02

1.



$$\begin{cases} \delta_1 = -\frac{1}{2} u_y \\ \delta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} u_y \end{cases} \Rightarrow \delta_2 = -\sqrt{3} \delta_1 \quad (1)$$



$$\uparrow: \frac{1}{2} P_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} P_2 = 0 \Rightarrow P_1 = \sqrt{3} P_2 \quad (2)$$

$$P_1 = \frac{EA}{L} (\delta_1 - \alpha \Delta T L); \quad P_2 = \frac{EA}{L} \delta_2 \quad (3)$$

$$(2,3) \Rightarrow \delta_1 - \alpha \Delta T L = \sqrt{3} \delta_2$$

$$(1) \Rightarrow \delta_1 - \alpha \Delta T L = -3 \delta_1 \Rightarrow \delta_1 = \frac{1}{4} \alpha \Delta T L$$

$$(3) \Rightarrow \underline{P_1 = -\frac{3}{4} EA \alpha \Delta T}$$

2.

$$EI W'''' = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right); \quad W = W_h + W_p$$

$$W_p = \frac{q_0 L^4}{EI \pi^4} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

W_p satisfies the boundary conditions:

$$W(0) = W(L) = 0; \quad W''(0) = W''(L) = 0$$

$$\Rightarrow W_h = 0; \quad \underline{W = \frac{1}{\pi^4} \frac{q_0 L^4}{EI}}$$

$$3. \quad \sigma_y = 12 \sigma_x = 120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm R ; R = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 444 \text{ MPa}, \sigma_2 = 76 \text{ MPa}, \sigma_3 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{e, \text{Tresca}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 444 \text{ MPa} < 500 \text{ MPa}$$

$\Rightarrow$ Ingen plastiskitet

$$4. \quad \text{Euler 1: } P = \frac{\pi^2 EI}{4h^2}$$

$$\Rightarrow h_{\text{crit}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{P}} ; I = \frac{\pi q^4}{4} \quad (q = 4 \text{ cm})$$

$$P = mg$$

$$\Rightarrow h_{\text{crit}} \approx 14 \text{ m}$$

$$5. \quad K_{IC} = \frac{P}{bt} \sqrt{\pi a} f_5 ; \frac{a}{W} = 0,5 \Rightarrow f_5 \approx 2,8$$

$$\Rightarrow K_{IC} = \frac{3 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\pi \cdot 0,02} \cdot 2,8 \approx 53 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

Rörret:

$$K_{IC} = \frac{P_0 r}{t} \sqrt{\pi a} f_{14} ; \lambda = \frac{a}{\sqrt{r t}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1$$

$$\Rightarrow f_{14} \approx 1,5$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{t}{r} K_{IC} \frac{1}{\sqrt{\pi a} \cdot 1,5} = \frac{1}{25} \cdot 53 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 0,005}} \cdot \frac{1}{1,5}$$

$$\approx 11,3 \text{ MPa}$$

6.

Antisymmetrisch

$$\omega_1 = (\mu_1 L)^2 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{8A}}$$

$$FS \text{ Tab 11.2, Fall 6} \Rightarrow \mu_1 L = \pi \quad (1)$$

Symmetrisch

$$\text{Randwertbed.} : w(0) = 0, w''(0) = 0, w'(L) = 0$$

$$\begin{array}{c} \uparrow T(L) \quad \uparrow T(L) \\ \downarrow T(L) \quad \downarrow T(L) \\ \frac{1}{L} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} w(L) = -2T(L) \frac{1}{k} \\ T(L) = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \end{cases} \quad (2)$$

$$FS \text{ 11.117} \Rightarrow w(x, t) = f(x) \sin(\omega t)$$

$$f(x) = C_1 \cosh(\mu_1 x) + C_2 \sinh(\mu_1 x) + C_3 \cos(\mu_1 x) + C_4 \sin(\mu_1 x); \quad \mu_1 = \frac{\pi}{L} \quad \text{aus (1)}$$

$$RV: f(0) = f''(0) = 0 \Rightarrow C_1 = C_3 = 0$$

$$\begin{aligned} f'(L) = 0 &\Rightarrow C_2 \cosh(\pi) + C_4 \cos(\pi) = 0 \\ &\Rightarrow C_4 = -C_2 \cosh(\pi) \quad (3) \end{aligned}$$

$$(2) \Rightarrow C_2 \sinh(\pi) + C_4 \sin(\pi) =$$

$$= \frac{2EI}{L} \mu_1^3 (C_2 \cosh(\pi) - C_4 \cos(\pi))$$

$$(1,3) \Rightarrow C_2 \sinh(\pi) = \frac{2EI \pi^3}{L^3} \cdot 2 C_2 \cosh(\pi)$$

$$\Rightarrow k = \frac{4EI \pi^3}{L^3} \coth(\pi) \approx 124 \frac{EI}{L^3}$$