

LÖSNINGSFÖRSLAG**Tentamen del 2****SF1544, 2022-06-08, kl 08.00-11.00,****Numeriska metoder och grundläggande programmering, del 1****P1** Vi vill hitta lösningar (x, y, z) till det icke-linjära ekvationssystemet

$$x^2 + y^2 = 5 - z^2$$

$$\sqrt{z} = 2x$$

$$x^2 + y = -z$$

- (6 p) **a)** Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för systemet. Ange explicita uttryck för alla element i de vektor- och matrisvärda funktionerna som ingår.

Lösning: Systemet skrivs om på standardform, $F(\mathbf{x}) = 0$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0$$

$$\sqrt{z} - 2x = 0$$

$$x^2 + y + z = 0.$$

Jacobianen till F blir,

$$J_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ -2 & 0 & 1/(2\sqrt{z}) \\ 2x & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Givet $\mathbf{x}_0$, tar Newtons metod formen:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - J_F(\mathbf{x}_i)^{-1} F(\mathbf{x}_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

- (6 p) **b)** Skriv ett Matlab-pogram som använder Newtons metod för att lösa ekvationssystemet. Svaret ska ha ett fel som är mindre än 10^{-10} i alla komponenter. Använd startgissningen $(0, -1, 1)$.

Lösning:

```
J_F = @(x) [2*x(1) 2*x(2) 2*x(3) ;
            2 0 -1/(2*sqrt(x(3))) ;
            2*x(1) 1 1];
F = @(x) [dot(x,x)-5; 2*x(1)-sqrt(x(3)); x(1)^2+x(2)+x(3)];

x = [0;-1;1];

h = 1;

while norm(h,inf)>10^-10
    h = J_F(x)\F(x);
    x = x-h;
end
```

- (3 p) c) När Newtons metod används för att lösa ett ekvationssystem får man att normen av felvektorn $\|e_k\|_2$ efter iteration k , är

k	1	2	3
$\ e_k\ $	0.2	0.02	$2 \cdot 10^{-4}$

Hur många ytterligare iterationer behövs för att få ett fel som är mindre än 10^{-10} ? Motivera ditt svar!

Lösning: Felet avtar kvadratisk. Således blir felet efter iteration 4 av storleksordningen 10^{-8} och efter iteration 5, med betryggande marginal, mindre än 10^{-10} . Svar: det krävs ytterligare 2 iterationer.

P2 Vi vill lösa följande integral numeriskt

$$\int_0^1 t + (3t + 5)^3 dt.$$

- (5 p) a) Skriv ett Matlab-program som beräknar integralen med hjälp av trapezregeln. Använd steglängden $h = 1/16$.

Lösning:

```
f = @(t) t+(3*t+5).^3;  
h = 1/16;  
x = 0:h:1;  
I = sum(f(x))*h-h/2*(f(0)+f(1))
```

- (2 p) b) Vilken noggrannhetsordning förväntar du dig av metoden i a)-uppgiften?

Lösning: Metoden har noggrannhetsordning 2 då andraderivatan till integranden är begränsad i intervallet.

- (5 p) c) Felet plottas i en loglog-graf mot steglängden. Resultat blir en linje. Förklara varför det blir en linje och ange vilken dess lutning blir.

Lösning: Enligt teorin begränsas det globala felet av $C_{f''}h^2$, där konstanten $C_{f''}$ beror på andraderivatan av integranden och intervalllängden. I en loglog-graf blir detta en linje med lutning 2 eftersom $\log(C_{f''}h^2) = c + 2\log(h)$.

- (3 p) d) Vi använder istället Simpsons metod för att beräkna integralen. Vad blir felet då? Motivera ditt svar!

Lösning: Felet blir 0 eftersom felet i Simpsons metod begränsas av $h^4/180 \cdot \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)|$, vilket blir 0 då $f^{(4)}(x) = 0$.

Var god vänd!

P3 Följande begynnelsevärdesproblem är givet

$$y'(t) = y(1 - y), \quad 0 \leq t \leq 40.$$

med $y(0) = 10^{-7}$.

- (2 p) a) Skissa hur lösningen beter sig samt ange en övre begränsning på y .

Lösning: y begränsas av 1, $y(t) < 1$ för alla t .

(4 p)

- b) Formulera Euler bakåt för problemet.

Lösning: Iterationen ger upphov till ett kvadratisk polynom i det okända värdet y_{n+1} , om man löser detta analytiskt erhålls (negativ rot falsk lösning):

$$y_{n+1} = -\frac{(1-h)}{2h} + \sqrt{\frac{y_n}{h} + \frac{(1-h)^2}{4h^2}}$$

Alternativt kan man använda Newtons metod eller annan FPI.

(8 p)

- c) Visa att Euler bakåt respekterar den övre begränsningen.

Lösning: För Euler bak gäller att: nästa värde är det från vilket man hamnar på nuvarande värde om man går ett steg bak i derivatans riktning. Eftersom $y'(1) = 0$ och $y'(>1) < 0$ så går det aldrig att gå bakåt från $y \geq 1$ och komma till $y < 1$, således kan det aldrig inträffa att $y_{n+1} > 1$ om $y_n < 1$.

ALTERNATIV LÖSNING: Låt oss anta att $y_n < 1$, och mer specifikt att $y_n = 1 - \epsilon$,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -\frac{(1-h)}{2h} + \sqrt{\frac{y_n}{h} + \frac{(1-h)^2}{4h^2}} \\ &= -\frac{(1-h)}{2h} + \sqrt{\frac{1+2h(y_n-1)+h^2}{4h^2}} \\ &= -\frac{(1-h)}{2h} + \sqrt{\frac{(1+h)^2-4h\epsilon}{4h^2}} \\ &< -\frac{(1-h)}{2h} + \frac{(1+h)}{2h} = 1 \end{aligned}$$

(6 p)

- d) Jämför beräkningsmässigt Euler bakåt med Euler framåt för detta specifika problem. Vilken metod rekommenderar du?

Lösning Båda metoder har noggrannhetsordning 1, d.v.s. samma storlek på tidssteget ger ungefär samma fel förutsatt att metoderna är stabila. Beräkningsmässigt skiljer sig metoderna eftersom Euler bak kräver att en kvadratrot beräknas i varje steg. Detta gör att Euler bak kostar cirka 4 gånger så mycket som Euler fram. Frågan blir nu att reda ut metodernas stabilitetsområde.

Vi erinrar iterationen för Euler fram:

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + hy^n(1-y^n) = y^n(1+h(1-y^n)) \\ \{y^n = 1-\epsilon\} &= (1-\epsilon)(1+h\epsilon) \end{aligned}$$

Vi ser att om $h < 1$ så förblir iterationen < 1 (stabil). För $1 < h \leq 3$ så oscillerar lösningen kring $y = 1$ och en övre begränsning ges av $1 + \frac{h-1}{2h}$ (derivera m.a.p. ϵ och sätt lika med noll för att få maximal överskattning, även här syns att $h < 1$ ger stabilitet). För $h > 3$ kommer iterationen att bli obegränsat negativ eftersom metodens överskattning då blir så stor att nästa iterat blir negativt efter vilket iterationen blir mer och mer negativ. Sammanfattningsvis kan sägas att för $h > 4$ är Euler bak beräkningsmässigt mer effektiv, i annat fall är Euler fram mer effektiv.