



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Lösningsförslag till tentamen
Tisdag den 22 oktober 2024

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem för $y = y(x)$ och bestäm lösningarnas existensintervall.

(a) $y' = -3y^{4/3} \sin x$, $y(\pi/2) = 1$, (b) $y^2 + 4xy + (2xy + 2x^2) \frac{dy}{dx} = 0$, $y(1) = 1$.

(För båda problemen kan lösningen skrivas på explicit form.) (4 p)

Lösningsförslag. (a) Detta är en separabel ekvation och vi skriver om den som

$$\frac{1}{3}y^{-4/3}y' = -\sin x.$$

Vi integrerar med avseende på x med substitutionen $y = y(x)$, $dy = y'dx$, och får

$$-y^{-1/3} = \int \frac{1}{3}y^{-4/3} dy = \int \frac{1}{3}y^{-4/3}y' dx = -\int \sin x dx = \cos x + C.$$

Initialvillkoret $y(\pi/2) = 1$ ger att

$$-1^{-1/3} = \cos(\pi/2) + C = 0 + C$$

så lösningen uppfyller

$$-y^{-1/3} = \cos x - 1.$$

eller

$$y(x) = \frac{1}{(1 - \cos x)^3}.$$

Lösningens existensintervall är det största intervall kring $x = \pi/2$ där lösningen existerar. I detta fall slutar lösningen existera vid $x = 0$ och $x = 2\pi$ där vi delar med noll. Existensintervallet är alltså $0 < x < 2\pi$.

(b) Eftersom

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2 + 4xy) = 2y + 4x = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 2x^2)$$

och ekvationen inte är singular någonstans i xy -planet så är detta en exakt ekvation. Vi bestämmer en potentialfunktion $\psi(x, y)$ som uppfyller

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y^2 + 4xy, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2xy + 2x^2.$$

Vi integrerar den första av dessa ekvationer och får

$$\psi(x, y) = xy^2 + 2x^2y + h(y)$$

där $h(y)$ är en funktion av y som återstår att bestämma. Detta insatt i andra ekvationen ger

$$2xy + 2x^2 = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2xy + 2x^2 + h'(y)$$

vilket är uppfyllt om $h'(y) = 0$, vilket vi har om vi väljer $h(y) = 0$. Vi har alltså hittat en potentialfunktion

$$\psi(x, y) = xy^2 + 2x^2y.$$

Lösningarna till differentialekvationen ges på implicit form av $\psi(x, y) = A$ där A är en konstant. Initialvillkoret ger att den sökta lösningen går igenom punkten $(x, y) = (1, 1)$ och alltså uppfyller

$$xy^2 + 2x^2y = 3 \Leftrightarrow y^2 + 2xy = \frac{3}{x} \Leftrightarrow y^2 + 2xy + x^2 = \frac{3}{x} + x^2 \Leftrightarrow (y+x)^2 = \frac{3}{x} + x^2$$

eller

$$y = -x \pm \sqrt{\frac{3}{x} + x^2} = -x + \sqrt{\frac{3}{x} + x^2}.$$

Denna funktion är definierad för alla $x > 0$ men är singulär vid $x = 0$. Lösningens existensintervall är alltså $x > 0$.

Kommentar: Ekvationen är också en så kallad homogen första ordningens ekvation i meningen att dess koefficienter kan skrivas som funktioner av y/x . Den kan också lösas med substitutionen $v = y/x$.

□

2. Den homogena ekvationen $y'' - 6t^{-2}y = 0$ för $y = y(t)$, $t > 0$, har en lösning $y_1(t) = t^{-2}$. Bestäm den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen

$$y'' - 6t^{-2}y = 5t - 4.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vi använder metoden med reduktion av ordningen och sätter

$$y(t) = y_1(t)v(t) = t^{-2}v(t).$$

Med denna ansats är

$$y' = t^{-2}v' - 2t^{-3}v, \quad y'' = t^{-2}v'' - 4t^{-3}v' + 6t^{-4}v,$$

vilket insatt i ekvationen ger

$$y'' - 6t^{-2}y = t^{-2}v'' - 4t^{-3}v' + 6t^{-4}v - 6t^{-2}t^{-2}v = t^{-2}v'' - 4t^{-3}v' = 5t - 4$$

eller

$$v'' - 4t^{-1}v' = t^2(5t - 4).$$

Detta är en första ordningens linjär ekvation för funktionen $v'(t)$. Vi multiplicerar med den integrerande faktorn

$$e^{\int (-4t^{-1}) dt} = e^{-4 \ln(t)} = t^{-4}$$

och får

$$(t^{-4}v')' = t^{-4}v'' - 4t^{-5}v' = t^{-2}(5t - 4) = 5t^{-1} - 4t^{-2}.$$

Vi integrerar detta med integralformler (27) och (28), vilket ger

$$t^{-4}v' = 5 \ln t + 4t^{-1} + C_1$$

eller

$$v' = 5t^4 \ln t + 4t^3 + C_1 t^4.$$

Detta integrerar vi sedan med hjälp av integralformler (27) och (36), vilket ger

$$v = 5t^5 \left(\frac{\ln t}{5} - \frac{1}{5^2} \right) + t^4 + C_1 \frac{t^5}{5} + C_2 = t^5 \ln t + t^4 + \frac{C_1 - 1}{5} t^5 + C_2$$

och den sökta allmänna lösningen

$$\begin{aligned} y(t) = t^{-2}v(t) &= t^3 \ln t + t^2 + \frac{C_1 - 1}{5} t^3 + C_2 t^{-2} \\ &= t^3 \ln t + t^2 + D_1 t^3 + D_2 t^{-2} \end{aligned}$$

där vi döpte om de valbara konstanterna till $D_1 = \frac{C_1 - 1}{5}$ och $D_2 = C_2$.

Alternativ metod. Den homogena ekvationen $y'' - 6t^{-2}y = 0$ eller $t^2 y'' - 6y = 0$ är en Eulerekvation, och ansatsen $y = t^r$ ger en lösning om $r(r - 1) - 6 = 0$, det vill säga om $r = -2$ eller $r = 3$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är alltså

$$y = C_1 t^3 + C_2 t^{-2}.$$

För variation av parametrar gör vi ansatsen

$$y(t) = u_1(t)t^3 + u_2(t)t^{-2}.$$

Derivatan av detta är

$$y' = u_1' t^3 + u_2' t^{-2} + 3u_1 t^2 - 2u_2 t^{-3}.$$

Vi antar att

$$u_1' t^3 + u_2' t^{-2} = 0$$

så att

$$y' = 3u_1 t^2 - 2u_2 t^{-3}.$$

Detta ger

$$y'' = 3u_1't^2 - 2u_2't^{-3} + 6u_1t + 6u_2t^{-4}$$

Insatt i ekvationen får vi

$$5t - 4 = y'' - 6t^{-2}y$$

$$= (3u_1't^2 - 2u_2't^{-3} + 6u_1t + 6u_2t^{-4}) - 6t^{-2}(u_1t^3 + u_2t^{-2}) = 3u_1't^2 - 2u_2't^{-3}$$

Funktionerna $u_1(t), u_2(t)$ ska alltså uppfylla

$$\begin{cases} 3u_1't^2 - 2u_2't^{-3} &= 5t - 4 \\ u_1't^3 + u_2't^{-2} &= 0 \end{cases},$$

eller

$$\begin{cases} 3u_1't^2 - 2u_2't^{-3} &= 5t - 4 \\ u_1't^2 + u_2't^{-3} &= 0 \end{cases}.$$

Vi löser ut $u_1'(t), u_2'(t)$ och får

$$u_1' = t^{-1} - \frac{4}{5}t^{-2}, \quad u_2' = -t^4 + \frac{4}{5}t^3.$$

Detta integreras till

$$u_1(t) = \ln t + \frac{4}{5}t^{-1} + C_1, \quad u_2(t) = -\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{5}t^4 + C_2.$$

Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså

$$\begin{aligned} y(t) &= u_1t^3 + u_2t \\ &= \left(\ln t + \frac{4}{5}t^{-1} + C_1\right)t^3 + \left(-\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{5}t^4 + C_2\right)t^{-2} \\ &= t^3 \ln t + t^2 + \left(C_1 - \frac{1}{5}\right)t^3 + \left(C_2 + \frac{4}{5}\right)t^{-2}. \end{aligned}$$

□

3. Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ har det dubbla egenvärdet $r = -3$. Bestäm den fundamentalmatris $\Phi(t)$ till systemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ för vilken $\Phi(0)$ är lika med identitetsmatrisen $\mathbf{I}$. (4 p)

Lösningförslag. Ansatsen $\mathbf{x}(t) = e^{rt}\xi$ ger en lösning om ξ är en egenvektor till $\mathbf{A}$ med egenvärde r . Egenvektorer ξ med det givna egenvärdet $r = -3$ ges av

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\xi = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\xi.$$

Vi hittar en egenvektor $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och en lösning

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Då det ej finns fler linjärt oberoende egenvektorer gör vi ansatsen $\mathbf{x}(t) = te^{rt}\xi + e^{rt}\eta$ vilket ger en lösning om

$$rte^{rt}\xi + e^{rt}\xi + re^{rt}\eta = \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(te^{rt}\xi + e^{rt}\eta) = te^{rt}\mathbf{A}\xi + e^{rt}\mathbf{A}\eta$$

det vill säga om

$$\mathbf{A}\xi = r\xi \quad \text{och} \quad \mathbf{A}\eta - r\eta = \xi,$$

vilket betyder att ξ är en egenvektor till $r = -3$, och η är en så kallad generaliserad egenvektor. Vi väljer $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ som ovan, och ska därefter lösa ekvationen $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\eta = \xi$ eller

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\eta = (\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En lösning till denna ekvation är $\eta = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, så

$$\mathbf{x}_2(t) = te^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{pmatrix} t-1 \\ -t \end{pmatrix}.$$

är en andra lösning till systemet av differentialekvationer.

Matrisen $\Psi(t)$ med $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ som kolumner är en fundamentalmatris till ekvationen,

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & (t-1)e^{-3t} \\ -e^{-3t} & -te^{-3t} \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ -1 & -t \end{pmatrix}$$

Den uppfyller $\Psi'(t) = \mathbf{A}\Psi(t)$, men $\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{I}$. Vi multiplicerar $\Psi(t)$ med $\Psi(0)^{-1}$ från höger och får

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Psi(t)\Psi(0)^{-1} = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & t+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Denna matris $\Phi(t)$ uppfyller $\Phi'(t) = \Psi'(t)\Psi(0)^{-1} = \mathbf{A}\Psi(t)\Psi(0)^{-1} = \mathbf{A}\Phi(t)$ tillsammans med $\Phi(0) = \mathbf{I}$ och är alltså den sökta fundamentalmatrisen. □

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Visa att ekvationen

$$x^2 y'' + xy' + (x-1)y = 0$$

för $y = y(x)$ har en reguljär singulär punkt vid $x = 0$. Bestäm en serielösning av Frobeniustyp vid $x = 0$ till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i serielösningen, samt beräkna minst fyra noll-skiljda termer. För vilka x konvergerar denna serielösning? Förklara också varför denna serieansats inte ger en andra linjärt oberoende lösning. **(4 p)**

Lösningsförslag. Eftersom koefficienten x^2 framför högsta derivatan y'' är noll vid $x = 0$ är punkten $x = 0$ en singulär punkt. För att undersöka om det är en reguljär singulär punkt skriver vi om ekvationen som

$$x^2 y'' + x(1)y' + (x-1)y = 0.$$

Då koefficienterna i parenteser här,

$$1 \quad \text{och} \quad x-1,$$

båda är reguljära vid $x = 0$ är det en reguljär singulär punkt.

För att hitta serielösningar till ekvationen gör vi ansatsen med en Frobeniusserie

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n},$$

där r är ett reellt tal, och vi antar att den första koefficienten $a_0 = 1$. Då är

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n-1} \quad \text{och} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-2}.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 y'' + xy' + (x-1)y \\ &= x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-2} \right) + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n-1} \right) + (x-1) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(r+n)(r+n-1) + a_n(r+n) - a_n \right) x^{r+n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n+1)(r+n-1)a_n x^{r+n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n} \\ &= (r+1)(r-1)a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(r+n+1)(r+n-1)a_n + a_{n-1} \right] x^{r+n}. \end{aligned}$$

Eftersom $a_0 = 1$ så måste r uppfylla indicialekvationen

$$0 = (r+1)(r-1).$$

Vi får två lösningar

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -1.$$

För att få en lösning måste koefficienterna sedan uppfylla

$$(r+n+1)(r+n-1)a_n + a_{n-1} = 0$$

för $n \geq 1$.

Enligt teorin för lösningar med Frobeniusserier vet vi att den större roten $r_1 = 1$ kommer att ge en lösning. För $r_1 = 1$ har vi rekursionsekvationen

$$(n+2)na_n + a_{n-1} = 0$$

eller

$$a_n = -\frac{1}{(n+2)n}a_{n-1}$$

för $n \geq 1$. Observera att vi inte delar med noll här. Eftersom $a_0 = 1$ får vi

$$a_1 = -\frac{1}{3 \cdot 1}1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = \left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{24}, \quad a_3 = -\frac{1}{360}, \quad a_4 = \frac{1}{24 \cdot 360} = \frac{1}{8640}, \dots$$

Det är möjligt att identifiera att

$$a_n = \frac{2(-1)^n}{(n+2)!n!}, \quad n \geq 0.$$

För roten $r_1 = 1$ hittar vi alltså en lösning

$$y_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x \left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{360}x^3 + \frac{1}{8640}x^4 + \dots \right) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(n+2)!n!} x^n$$

till differentialekvationen.

Enligt teori för Frobeniusserier som lösningar till reguljärt singulära ekvationer så konvergerar serien åtminstone för de x för vilka koefficientfunktionernas Taylorserier konvergerar. I detta fall är dessa koefficienter lika med 1 och $x - 1$ vilka förstås har serieutvecklingar som konvergerar för alla x . Serielösningen $y_1(x)$ konvergerar alltså för alla x (vilket också är enkelt att testa med kvottestet).

Om ansatsen med en Frobeniusserie skulle ge en andra lösning så skulle det vara med den andra roten $r_2 = -1$ till indicialekvationen. För denna ska koefficienterna a_n uppfylla $a_0 = 1$ samt rekursionsekvationen

$$n(n-2)a_n + a_{n-1} = 0$$

för $n \geq 1$. Med $n = 1$ får vi $-a_1 + a_0 = 0$ så $a_1 = 1$. Därefter får vi ekvationen

$$2 \cdot 0 \cdot a_2 + a_1 = 0, \quad \text{eller} \quad 1 = 0,$$

för $n = 2$. Då denna ekvation är omöjlig att uppfylla så finns det ingen andra lösning. $\square$

5. Den icke linjära ekvationen

$$x'' + (1 - (x')^2)x' + x = 0$$

för $x = x(t)$ har en lösning $x(t) = 0$. Om vi sätter $y(t) = x'(t)$ så ger ekvationen ett autonomt system för $(x(t), y(t))$ för vilket $(0, 0)$ är en kritisk punkt.

- (a) Förklara vad det betyder att en kritisk punkt är (asymptotiskt) stabil resp. instabil.
- (b) Vad säger metoden med linjärisering om stabiliteten för den kritiska punkten i denna uppgift?
- (c) Visa att den kritiska punkten är stabil med Lyapunovs metod.

(4 p)

Lösningsförslag. (a) Se kursboken avsnitt 9.2.

(b) Med $y = x'$ får vi $y' = x'' = -(1 - (x')^2)x' - x = -(1 - y^2)y - x$ och det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(1 - y^2)y - x \end{cases}$$

För detta system ges linjäriseringen i origo av det linjära systemet $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$.

Typen för det linjära systemet är en stabil spiral, vilket säger oss att det ursprungliga systemet har en asymptotiskt stabil kritisk punkt i origo.

(c) Om vi istället ska använda Lyapunovs metod så försöker vi hitta en Lyapunovfunktion på formen

$$V(x, y) = Ax^2 + By^2.$$

Om $A, B > 0$ så är alltså $V(x, y)$ en positivt definit funktion vilket är första villkoret på en Lyapunovfunktion. Vi ska nu välja A, B så att $V(x, y)$ inte växer längs lösningskurvor till systemet som startar nära $(0, 0)$. För en sådan lösningskurva beräknar vi

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2Axy + 2By(-(1 - y^2)y - x) = (2A - 2B)xy - 2By^2(1 - y^2).$$

Om vi väljer $A = B = 1$ och $B = 1/2$ så är $\dot{V} = -2y^2(1 - y^2)$ så att $\dot{V} \leq 0$ då $y^2 \leq 1$. Funktionen $\dot{V}$ är alltså negativt semidefinit så enligt Lyapunovs stabilitetssats är origo en stabil kritisk punkt.

□

6. Denna uppgift gäller existens och entydighet för lösningar $y = y(t)$ till initialvärdesproblemet

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0,$$

där funktionen $f(t, y)$ är definierad på en rektangel R i ty -planet med $(0, 0) \in R$.

- (a) Formulera Picards sats som garanterar att initialvärdesproblemet har en unik lösning. Var noggrann när du anger villkoren i satsen.

I beviset av Picards sats definieras en följd av $y = \phi_n(t)$ av approximativa lösningar genom $\phi_0(t) = 0$ och $\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, \phi_n(s)) ds$. En del av beviset visar att det finns ett $h > 0$ så att alla $\phi_n(t)$ är definierade för $|t| \leq h$. Weierstrass M -test säger att om en följd av funktioner $f_k(t)$ uppfyller $|f_k(t)| \leq M_k$ för alla t där $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ konvergerar så konvergerar serien av funktioner $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ likformigt.

- (b) Visa att följden $f_k(t) = \phi_k(t) - \phi_{k-1}(t)$ uppfyller villkoren för Weierstrass M -test. Förklara kort hur existensen av en lösning följer av detta.

(4 p)

Lösningsförslag. (a) Se Boyce-DiPrima Theorem 2.8.1.

(b) Differentialkalkylens medelvärdessats tillämpad på $f(t, y)$ som funktion av y säger att

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y^*)(y_1 - y_2)$$

där y^* ligger mellan y_1 och y_2 . Eftersom funktionen $\partial f / \partial y$ är kontinuerlig på det kompakta definitionsområdet R så är den också begränsad, $|\partial f / \partial y| \leq K$, och vi drar slutsatsen att *Lipschitzvillkoret*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

gäller.

Eftersom $f(t, y)$ är kontinuerlig på rektangeln R så är den också begränsad. Låt L vara en konstant så att $|f| \leq L$ på R . För den första funktionen $\phi_1(t)$ har vi $\phi_1(t) = \int_0^t f(s, \phi_0(s)) ds = \int_0^t f(s, 0) ds$, så

$$|\phi_1(t)| = \left| \int_0^t f(s, 0) ds \right| \leq \int_0^{|t|} |f(s, 0)| ds \leq \int_0^{|t|} L ds = L|t|.$$

För ett induktionsbevis, antag nu att

$$|\phi_k(t) - \phi_{k-1}(t)| \leq \frac{LK^{k-1}|t|^k}{k!}$$

för något $k \geq 1$. Eftersom

$$\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t) = \int_0^t (f(s, \phi_k(s)) - f(s, \phi_{k-1}(s))) ds$$

så ger Lipschitzvillkoret och induktionsantagandet att

$$\begin{aligned} |\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)| &= \left| \int_0^t (f(s, \phi_k(s)) - f(s, \phi_{k-1}(s))) ds \right| \\ &\leq \int_0^{|t|} |f(s, \phi_k(s)) - f(s, \phi_{k-1}(s))| ds \\ &\leq \int_0^{|t|} K |\phi_k(s) - \phi_{k-1}(s)| ds \\ &\leq K \int_0^{|t|} \frac{LK^{k-1}|s|^k}{k!} ds = \frac{LK^k|t|^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Vi har alltså visat att

$$|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)| \leq \frac{LK^k |t|^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{LK^k h^{k+1}}{(k+1)!} = M_k$$

för alla $k = 0, 1, 2, \dots$, där $h > 0$ är sådant att alla $\phi_n(t)$ är definierade på intervallet $|t| \leq h$. Med kvottestet är det lätt att se att $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ är konvergent.

Vi drar slutsatsen att summan av funktioner $\sum_{k=0}^n f_k(t) = \sum_{k=0}^n \phi_k(t) - \phi_{k-1}(t) = \phi_n(t)$ konvergerar likformigt då $n \rightarrow \infty$. Då konvergensen är likformig kan vi låta $n \rightarrow \infty$ i iterationsformeln för $\phi_n(t)$ och se att gränsfunktionen $\phi(t)$ uppfyller $\phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s)) ds$. Om vi deriverar detta ser vi att $y = \phi(t)$ löser initialvärdesproblemet.

□