

KTH FYSIK

TENTAMEN TEORETISK FYSIK SI1155

Tisdag 2024-05-28 kl 08:00-13:00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag

Hjälpmedel BETA, miniräknare, linjal, formelblad på skrivningens sida 3-5

Poängsättning 6 poäng per problem

Examinator Mats Wallin tel 073 765 2000

1. En partikel med massa m rör sig på en sfärisk yta med radie R . Hamilton-operatorn är

$$H = \frac{L^2}{2mR^2}$$

Vågfunktionen vid tiden $t = 0$ är

$$\Psi(x, 0) = N(Y_0^0 + (1 + 2i)Y_1^1 + (3 - i)Y_2^2)$$

där Y_l^m är klotfunktioner. Bestäm:

- (a) N .
- (b) Vågfunktionen vid tiden t .
- (c) $\langle L^2 \rangle$ och $\langle L_z \rangle$.
- (d) $\langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle$.

2. En stråle av silveratomer passerar genom en Stern-Gerlach apparat med magnetfältet i riktningen $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)$. Den inkommande strålen har spinn-tillståndet

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+z\rangle + |-z\rangle)$$

där $|+z\rangle$ är spinn upp och $|-z\rangle$ är spinn ner i z-riktningen.

- (a) I den inkommande strålen beräkna $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ och $\langle S_z \rangle$.
- (b) Beräkna andelen partiklar som kommer ut ur Stern-Gerlach apparaten i spinn upp-strålen och i spinn ner-strålen i riktningen $\mathbf{n}$.

VÄND!

3. Två identiska partiklar är i en gemensam endimensionell oändlig potentiallåda med längden L . Partiklarna antas inte växelverka med varandra.

(a) En mätning av totala energin ger att systemet är i grundtillståndet. Vad är totala energin och tillståndsvektorn för systemet både i fallet när partiklarna är bosoner och när de är fermioner med spinn $1/2$. Vid degeneration, ange hur många degenererade tillstånd det finns och ange samtliga.

(b) Samma fråga som i (a) om energimätningen i stället ger första exciterade tillståndet.

4. En harmonisk oscillator i grundtillståndet utsätts vid $t = 0$ för störningen

$$V(x, t) = Ax^2 \sin(\Omega t)$$

där A är en konstant och Ω är vinkelfrekvensen hos störningen. Beräkna sannolikheten att oscillatorn är i det n :te exciterade tillståndet vid tiden $t > 0$. Approximera genom att i slutresultatet endast ta med termen som är nära resonans. Förenkla så långt som möjligt.

5. Vid alfa-sönderfall tunnlrar en α -partikel (som består av två protoner och två neutroner) ut ur en atomkärna. I datorlaborationen antogs utan härledning Gamows formel för transmissionssannolikheten: $T \approx e^{-C/\sqrt{E}}$ där C är en konstant. Härled formeln genom följande steg.

(a) WKB-approximationen: Ansätt en vågfunktion på formen $\psi = e^{if(x)/\hbar}$. Visa att lösningen till Schrödingerekvationen till lägsta ordningen i $\hbar$ blir

$$\psi \approx e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x') dx'}$$

där den klassiska rörelsemängden ges av $(p(x))^2 = 2m(E - V(x))$.

(b) För tunnling vid låga energier E genom området $x_1 < x < x_2$ där $V(x) > E$ blir transmissionssannolikheten

$$T \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x) - E)} dx}$$

För alfa-sönderfall är potentialen $V(x) = 2Ze^2/(4\pi\epsilon_0 x)$ och α -partikelns energi ges av $E = V(x_2)$. Visa att detta leder till $T \approx e^{-C/\sqrt{E}}$.

LYCKA TILL!

Lösningar

1. En partikel med massa m rör sig på en sfärisk yta med radie R . Hamiltonoperatorn är

$$H = \frac{L^2}{2mR^2}$$

Vågfunktionen vid tiden $t = 0$ är

$$\Psi(x, 0) = N(Y_0^0 + (1 + 2i)Y_1^1 + (3 - i)Y_2^2)$$

där Y_l^m är klotfunktioner. Bestäm:

- (a) N .
- (b) Vågfunktionen vid tiden t .
- (c) $\langle L^2 \rangle$ och $\langle L_z \rangle$.
- (d) $\langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle$.

(a)

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = |N|^2(1 + 1 + 4 + 9 + 1) = 16|N|^2 = 1$$

Välj $N = 1/4$.

(b) $H = L^2/2mR^2$ och $L^2 Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$ ger $E_l = l(l+1)\hbar^2/2mR^2$. Tidsutvecklingen ges av de stationära tillstånden:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{4}(Y_0^0 + (1 + 2i)Y_1^1 e^{-iE_1 t/\hbar} + (3 - i)Y_2^2 e^{-iE_2 t/\hbar})$$

där $E_0 = 0, E_1 = 2\hbar^2/2mR^2, E_2 = 6\hbar^2/2mR^2$.

(c) $L^2 Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$ ger

$$\langle L^2 \rangle = \frac{1}{16}(0 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 6)\hbar^2 = \frac{70}{16}\hbar^2 = 4.375\hbar^2$$

$L_z Y_l^m = m\hbar Y_l^m$ ger

$$\langle L_z \rangle = \frac{1}{16}(0 + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 2)\hbar = \frac{25}{16}\hbar = 1.5625\hbar$$

(d) Börja med

$$\langle L_z^2 \rangle = \frac{1}{16}(0 + 5 \cdot 1^2 + 10 \cdot 2^2)\hbar^2 = \frac{45}{16}\hbar^2$$

Eftersom $\langle L^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle$ blir

$$\langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle = \langle L^2 \rangle - \langle L_z^2 \rangle = \frac{70 - 45}{16}\hbar^2 = \frac{25}{16}\hbar^2$$

Övning: visa att $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{25}{32}\hbar^2$.

2. En stråle av silveratomer passerar genom en Stern-Gerlach apparat med magnetfältet i riktningen $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)$. Den inkommande strålen har spinn-tillståndet

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+z\rangle + |-z\rangle)$$

där $|+z\rangle$ är spinn upp och $|-z\rangle$ är spinn ner i z-riktningen.

(a) I den inkommande strålen beräkna $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ och $\langle S_z \rangle$.

(b) Beräkna andelen partiklar som kommer ut ur Stern-Gerlach apparaten i spinn upp-strålen och i spinn ner-strålen i riktningen $\mathbf{n}$.

(a) Skriv på matrisform:

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |+x\rangle$$

Nu blir

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{2}(1,1) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}$$

$$\langle S_y \rangle = \frac{1}{2}(1,1) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2}(1,1) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(b) Spinnoperatoren i riktningen $\mathbf{n}$ är

$$S_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestäm egenvektorer till egenvärdena $S_n = \pm\hbar/2$

$$S_n = +\hbar/2 : (1/\sqrt{2} - 1)a + b/\sqrt{2} = 0 \Rightarrow |\chi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$$S_n = -\hbar/2 : (1/\sqrt{2} + 1)a + b/\sqrt{2} = 0 \Rightarrow |\chi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

Andel partiklar i utgående strålen med spinn upp i riktningen $\mathbf{n}$:

$$|\langle \chi_+ | \chi \rangle|^2 = \frac{1}{4-2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| (1, \sqrt{2}-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{4-2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} = 0.854$$

Andel partiklar i utgående strålen med spinn ner i riktningen $\mathbf{n}$:

$$|\langle \chi_- | \chi \rangle|^2 = \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| (-1, \sqrt{2}+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{4+2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} = 0.146$$

Kontroll: summan av andelarna är =1. OK.

3. Två identiska partiklar är i en gemensam endimensionell oändlig potentiallåda med längden L . Partiklarna antas inte växelverka med varandra.

(a) En mätning av totala energin ger att systemet är i grundtillståndet. Vad är totala energin och tillståndsvektorn för systemet både i fallet när partiklarna är spinnlösa bosoner och när de är fermioner med spinn $1/2$. Vid degeneration, ange hur många degenererade tillstånd det finns och ange samtliga.

(b) Samma fråga som i (a) om energimätningen i stället ger första exciterade tillståndet.

Notation: $|a\rangle|b\rangle$ betyder att partikel 1 är i a och partikel 2 är i b .

(a) Grundtillståndsenergin är $E = 2E_1 = \hbar^2\pi^2/mL^2$.

Spinnlösa bosoner: tillståndet är symmetriskt under utbyte

$$|\Psi\rangle = |1\rangle|1\rangle$$

Det finns ingen degeneration.

Fermioner med $s = 1/2$: tillståndet blir antisymmetriskt under utbyte genom att spinndelen är den antisymmetriska singletten:

$$|\Psi\rangle = |1\rangle|1\rangle\chi_{\text{singlett}}$$

Det finns ingen degeneration.

(b) Första exciterade energinivån är $E = E_1 + E_2 = 5\hbar^2\pi^2/2mL^2$.

Spinnlösa bosoner: tillståndet är symmetriskt under utbyte:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|2\rangle + |2\rangle|1\rangle)$$

Det finns ingen degeneration.

Fermioner med $s = 1/2$: det finns 4 degenererade energiegentillstånd: Ett egentillstånd med symmetrisk rumsdel och antisymmetrisk spinnsinglett:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|2\rangle + |2\rangle|1\rangle)\chi_{\text{singlett}}$$

Tre egentillstånd med antisymmetrisk rumsdel och symmetrisk spinntriplett:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|2\rangle - |2\rangle|1\rangle)\chi_{\text{triplett}}$$

Tillståndet efter mätningen blir en superposition av dessa 4 degenererade tillstånd.

4. En harmonisk oscillator i grundtillståndet utsätts vid $t = 0$ för störningen

$$V(x, t) = Ax^2 \sin(\Omega t)$$

där A är en konstant och Ω är vinkelfrekvensen hos störningen. Beräkna sannolikheten att oscillatorn är i det n :te exciterade tillståndet vid tiden $t > 0$. Approximera genom att i slutresultatet endast ta med termen som är nära resonans. Förenkla så långt som möjligt.

Från föreläsning 14 med $a = 0, b = n$:

$$P_{0n}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t e^{i\omega_0 t'} V_{n0}(t') dt' \right|^2$$

Beräkna $V_{n0}(t') = a \langle 2|x^2|0 \rangle \sin(\Omega t')$. Matriselementet:

$$\langle n|x^2|0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n|(a^\dagger + a)^2|0 \rangle$$

Eftersom $b = n \neq a = 0$ blir

$$\langle n|(a^\dagger + a)^2|0 \rangle = \langle n|(a^\dagger)^2|0 \rangle = \sqrt{2}\delta_{n,2}$$

Tidsintegralen:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{i\omega_0 t'} \sin(\Omega t') dt' &= \frac{1}{2i} \int_0^t e^{i\omega_0 t'} (e^{i\Omega t'} - e^{-i\Omega t'}) dt' = \frac{1}{2i} \int_0^t (e^{i(\omega_0 + \Omega)t'} - e^{i(\omega_0 - \Omega)t'}) dt' \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i(\omega_0 + \Omega)t} - 1}{i(\omega_0 + \Omega)} - \frac{e^{i(\omega_0 - \Omega)t} - 1}{i(\omega_0 - \Omega)} \right) \end{aligned}$$

Detta ger

$$P_{0n}(t) = \frac{|A|^2}{8m^2\omega^2} \left| \frac{e^{i(\omega_0 + \Omega)t} - 1}{\omega_0 + \Omega} - \frac{e^{i(\omega_0 - \Omega)t} - 1}{\omega_0 - \Omega} \right|^2 \delta_{n,2}$$

där $\omega_0 = (E_2 - E_0)/\hbar = 2\omega$ och $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$. Approximera genom att ta med termen med $\omega_0 - \Omega$ som är i resonans för $\Omega = \omega_0 = 2\omega$:

$$\begin{aligned} P_{02}(t) &= \frac{|A|^2}{8m^2\omega^2} \left| \frac{e^{i(\omega_0 - \Omega)t} - 1}{\omega_0 - \Omega} \right|^2 = \frac{|A|^2}{2m^2\omega^2} \left| \frac{e^{i(\omega_0 - \Omega)t/2} - e^{-i(\omega_0 - \Omega)t/2}}{2i(\omega_0 - \Omega)} \right|^2 \\ &= \frac{|A|^2}{2m^2\omega^2} \frac{\sin^2[(\omega_0 - \Omega)t/2]}{(\omega_0 - \Omega)^2} \end{aligned}$$

Sannolikheten för övergångar till $n \neq 2$ blir $= 0$ med första ordningens störningsteori.

5. Vid alfa-sönderfall tunnlar en α -partikel (som består av två protoner och två neutroner) ut ur en atomkärna. I datorlaborationen antogs utan härledning Gamows formel för transmissionssannolikheten: $T \approx e^{-C/\sqrt{E}}$ där C är en konstant. Härled formeln genom följande steg.

(a) WKB-approximationen: Ansätt en vågfunktion på formen $\psi = e^{if(x)/\hbar}$. Visa att lösningen till Schrödingerekvationen till lägsta ordningen i $\hbar$ blir

$$\psi \approx e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x') dx'}$$

där den klassiska rörelsemängden ges av $(p(x))^2 = 2m(E - V(x))$.

(b) För tunnling vid låga energier E genom området $x_1 < x < x_2$ där $V(x) > E$ blir transmissionssannolikheten

$$T \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x)-E)} dx}$$

För alfa-sönderfall är potentialen $V(x) = 2Ze^2/(4\pi\epsilon_0 x)$ och α -partikelns energi ges av $E = V(x_2)$. Visa att detta leder till $T \approx e^{-C/\sqrt{E}}$.

(a) Derivera $\psi = e^{if(x)/\hbar}$:

$$\begin{aligned}\psi' &= \frac{if'}{\hbar} \psi \\ \psi'' &= \left(\frac{if''}{\hbar} - \frac{(f')^2}{\hbar^2} \right) \psi\end{aligned}$$

SE:

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + V\psi &= E\psi \\ -\frac{1}{2m} (i\hbar f'' - (f')^2) \psi + V\psi &= E\psi\end{aligned}$$

Lägsta ordningen i $\hbar$ fås genom att sätta $\hbar = 0$ vilket ger

$$(f')^2 = 2m(E - V(x)) = (p(x))^2 \Rightarrow f' = \pm p(x) \Rightarrow f = \pm \int p(x') dx'$$

Detta ger den sökta formen $\psi \approx e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x') dx'}$ som gäller till ordningen $\hbar^0$.

Kommentar: till första ordningen i $\hbar$ blir

$$\psi \approx \frac{A}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x') dx'}$$

där A är en konstant. Se Griffiths bok.

(b) Utgå från

$$T \approx \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{V(x) - E} dx \right) = \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mk} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_2}} dx \right)$$

där $V = k/x, E = k/x_2, k = 2Ze^2/(4\pi\epsilon_0)$. Integralen blir (BETA sid 153 nr 59):

$$\frac{1}{\sqrt{x_2}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{x_2 - x}{x}} dx = \frac{1}{\sqrt{x_2}} \left(x_2 \arcsin 1 - \sqrt{x_1(x_2 - x_1)} - x_2 \arcsin \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \right)$$

Tunnling vid låga energier betyder att $E = V(x_2)$ är mycket mindre än tunnlingsbarriären $V(x_1)$ dvs $1/x_2 \ll 1/x_1$ eller $x_1 \ll x_2$. I denna gräns kan uttrycket ovan förenklas genom $x_2 - x_1 \approx x_2, \arcsin \sqrt{x_1/x_2} \approx \sqrt{x_1/x_2}$ vilket ger

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_2}} dx \approx \sqrt{x_2} \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{x_1}$$

Den andra termen är en konstant som kan försummas för $x_1 \ll x_2$. Med $x_2 = k/E$ blir då

$$T \approx \exp(-C/\sqrt{E})$$

där

$$C = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar}$$

är en konstant som inte beror på E .

Alternativ lösning med dimensionsanalys: $[V - E] = [E] = [k/x]$ ger

$$[\int \sqrt{V - E} dx] = [\sqrt{E}x] = [\sqrt{E}k/E] = [k/\sqrt{E}] \Rightarrow \int \sqrt{V - E} dx \sim \frac{1}{\sqrt{E}}$$

dvs

$$T \approx \exp(-C/\sqrt{E})$$

där C är en konstant som inte beror på E . Notera att i princip kan det även finnas en term till i exponenten eftersom $[k/\sqrt{E}] = [k/\sqrt{k/x_1}] = [\sqrt{kx_1}]$ dvs en konstant $\sim \sqrt{kx_1}$ som inte beror på E . På samma sätt som i lösningen ovan blir den försumbar vid låga E .