

Tentamen i Hållfasthetslära grundkurs med energimetoder (SE1055), 2 juni, 2022

Resultat finns på Mina Sidor senast den 30 juni, 2022.

Hjälpmedel: Formelsamling i hållfasthetslära, matematisk handbok och räknedosa.

Examinator: Peter Gudmundson, 076 213 2254

OBS! Skriv endast på en sida av bladen.

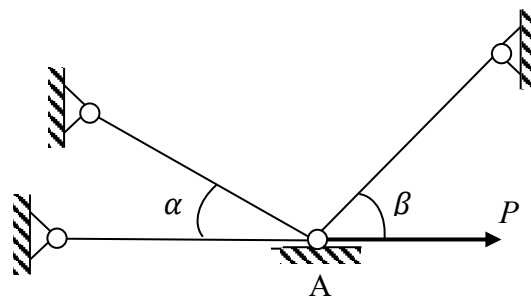
Skriv tydligt namn, program och personnummer på varje blad.

Rita gärna figurer i färg men ej med rödpenna.

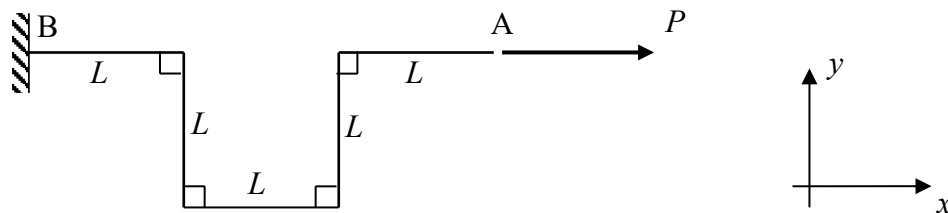
Exakt metod ska användas för lösning om inte annat anges i uppgiften

Betygsgränser: F: 0 - 11; FX: 12 - 13; E: 14 - 17; D: 18 - 21; C: 22 - 24; B: 25 - 28; A: 29 - 40. FX = möjlig komplettering till E. Maximum 4 bonuspoäng.

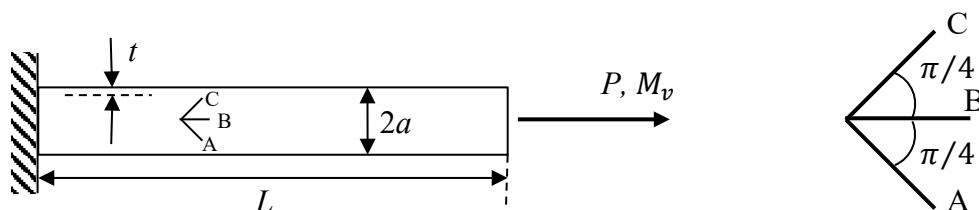
1. Tre stänger med längden L och styvheten EA är belastade med en horisontell kraft P i punkten A enligt figur. Beräkna den vertikala reaktionskraften i punkten A. (6p)



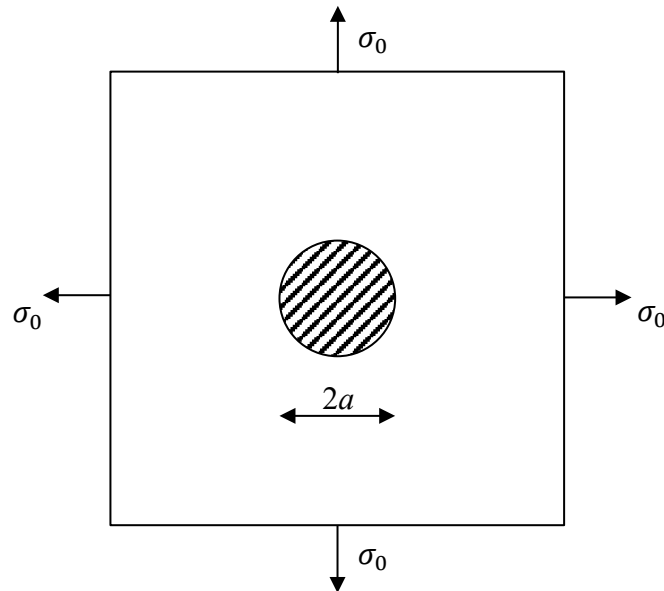
2. Fem balkar är fast förbundna med varandra och fast inspända i änden B, se figur. Den andra änden A är belastad med en kraft P i x -led. Alla fem balkelement har längden L och böjstyvheten EI . Beräkna förskjutningen i x -led av punkten A. Förlängningen av balkarna kan försummas. (6p)



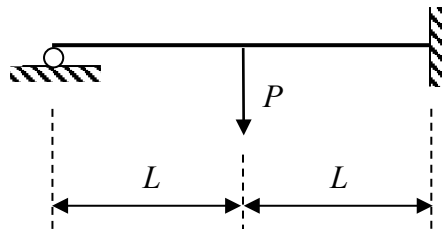
3. Ett tunnväggigt rör med längden L , radien a och tjockleken $t \ll a$ är belastad med en axiell kraft P och ett vridande moment M_v . På ytan av röret har normaltöjningar i tre riktningar ε_A , ε_B , ε_C uppmätts, se figur. Materialet i röret beskrivs av E-modulen E och Poissons tal ν . Bestäm det vridande momentet M_v . (Observera att överflödiga storheter ges i problemet.) (6p)



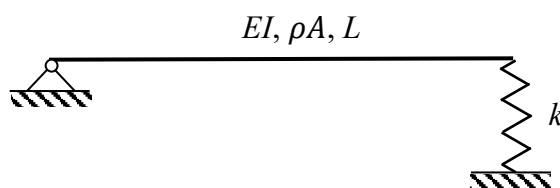
4. I en (oändligt) stor, tunn plåt finns i centrum en stel cirkulär skiva med radien a , se figur. På stora avstånd från hålet beskrivs spänningstillståndet av $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$, där σ_0 är känd. Materialet är linjärt elastiskt och det beskrivs av E-modulen E och Poissons tal $\nu = 0,3$. Beräkna den största huvudspänningen i plåten. Ledning: Den yttre randen kan betraktas som en cirkel med radie r sådan att $r/a \rightarrow \infty$. (6p)



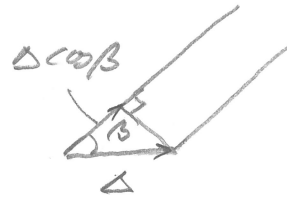
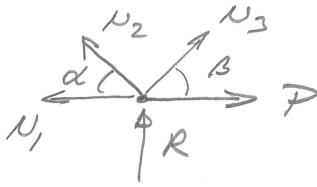
5. En balk med längden $2L$ och böjstyvheten EI är belastad med en koncentrerad kraft P på mitten av balken, se figur. Beräkna med hjälp av satsen om den potentiella energins minimum en approximativ uppskattning av utböjningen i angreppspunkten för den koncentrerade kraften P . (Exakt lösning med balkteori ger 0 poäng.)(6p)



6. En balk med längden L , böjstyvheten EI och massan per längdenhet ρA är fritt upplagd i den vänstra änden. Den högra änden är förbunden med en styvhet med fjäderkonstanten k ($F = k\Delta$), se figur. Formulera en ekvation från vilken egenfrekvenserna kan beräknas. Utvärdera ekvationen för $\lambda = kL^3/EI \rightarrow 0$ respektive $\lambda = kL^3/EI \rightarrow \infty$ och ange den lägsta egenfrekvensen för dessa fall. (6p)



1.



$$\Rightarrow: P - N_1 - N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \beta = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow: R + N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \beta = 0 \quad (2)$$

$$u_1 = \Delta; \quad u_2 = \Delta \cos \alpha; \quad u_3 = -\Delta \cos \beta \quad (3)$$

$$N_1 = \frac{EA}{L} \Delta; \quad N_2 = \frac{EA}{L} \Delta \cos \alpha; \quad N_3 = -\frac{EA}{L} \Delta \cos \beta \quad (4)$$

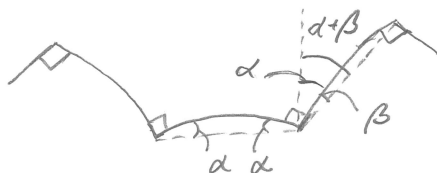
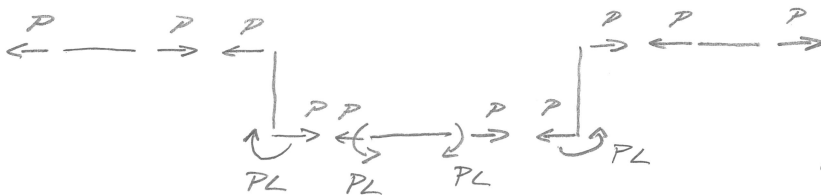
$$(1, 3, 4) \Rightarrow P - \frac{EA}{L} \Delta (1 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{PL}{EA} \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} \quad (5)$$

$$(2, 4, 5) \Rightarrow R + \frac{EA}{L} \frac{PL}{EA} \left(\frac{\cos \alpha \sin \alpha - \cos \beta \sin \beta}{1 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} \right) = 0$$

$$\Rightarrow R = P \frac{\cos \beta \sin \beta - \cos \alpha \sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} = \frac{P}{2} \frac{\sin(2\beta) - \sin(2\alpha)}{1 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}$$

2.



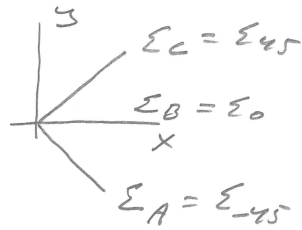
FS Tab 31.2.5

$$\alpha = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\beta = \frac{PL^2}{3EI}$$

$$\Delta = 2L(\alpha + \beta) = \frac{5}{3} \frac{PL^3}{EI}$$

3.



FS 2.21

$$\begin{cases} \sigma_B = \sigma_x \\ \sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sigma_{xy} \\ \sigma_A = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sigma_{xy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_c - \sigma_A$$

$$\tau_{xy} = G \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \sigma_{xy}$$



$$\Rightarrow \tau_{xy} = -\tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\mu)} (\sigma_A - \sigma_c)$$

FS 6.76, 6.81

$$M_z = 2\pi a^2 t \tau_{xy} z = 2\pi a^2 t \frac{E}{2(1+\mu)} (\sigma_A - \sigma_c)$$

4.

FS 7.24

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} ; \quad \sigma_\varphi = A + \frac{B}{r^2}$$

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_0 \Rightarrow A = \sigma_0$$

FS 3.4

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_r) ; \quad \sigma_\varphi(r) = 0$$

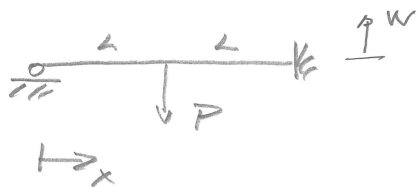
$$\Rightarrow \sigma_0 + \frac{B}{a^2} - \mu \left(\sigma_0 - \frac{B}{a^2} \right) = 0 \Rightarrow B = -\sigma_0 a^2 \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = \sigma_0 \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \right] \\ \sigma_\varphi = \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_0 \leq \sigma_r \leq \sigma_0 \left(1 + \frac{1-\mu}{1+\mu} \right) = \sigma_0 \frac{2}{1+\mu} \\ \sigma_0 \left[1 - \frac{1-\mu}{1+\mu} \right] = \sigma_0 \frac{2\mu}{1+\mu} \leq \sigma_\varphi \leq \sigma_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Max } \sigma_1 = \frac{2\sigma_0}{1+\mu} \approx 1.54 \sigma_0$$

5.



$$\text{Ansatz: } W = A \cdot (x - 2L)^2$$

(4 pot fylder homogene randvilkår)

$$\Rightarrow W'' = 2A(3x - 4L)$$

$$\text{FS 19.1} \Rightarrow U = W(W) + P W(L)$$

$$\begin{aligned} W(W) &= \int_0^{2L} \frac{1}{2} EI (W'')^2 dx = 2A^2 EI \int_0^{2L} (3x - 4L)^2 dx = \\ &= 2A^2 EI \left[\frac{(3x - 4L)^3}{9} \right]_0^{2L} = 2A^2 EI L^3 \frac{8 + 64}{9} = 16A^2 EI L^3 \end{aligned}$$

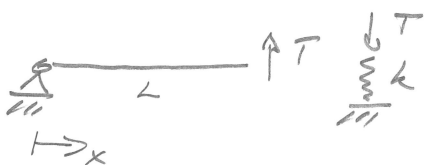
$$\Rightarrow U = 16A^2 EI L^3 + P A L^3$$

$$\frac{dU}{dA} = 0 \Rightarrow 32A EI L^3 + P L^3 = 0 ; A = -\frac{1}{32} \frac{P}{EI}$$

$$\Rightarrow W(L) = -\frac{PL^3}{32EI} = -0.031 \frac{PL^3}{EI}$$

$$\text{(Exakt: } W(L) = -\frac{7}{96} \frac{PL^3}{EI} \approx -0.073 \frac{PL^3}{EI} \text{)}$$

6.



$$\Rightarrow T = -k W(L)$$

$$T = -EI W'''(L)$$

$$\Rightarrow EI W'''(L) = k W(L)$$

$$\text{FS 11.117} \Rightarrow W = f(x) \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x) + \\ &+ C_3 \cos(\mu x) + C_4 \sin(\mu x) \end{aligned}$$

$$\mu^4 = \frac{\omega^2 g A}{EI}$$

6. forts.

$$\text{Rand villkor: } \begin{cases} f(0) = 0 ; f'(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f''(L) = 0 ; EI f'''(L) = k f(L) \end{cases} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow C_1 = C_3 = 0$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} \mu^2 C_2 \sinh(\mu L) - \mu^2 C_4 \sin(\mu L) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{k}{EI} (C_2 \sinh(\mu L) + C_4 \sin(\mu L)) = \\ = \mu^3 [C_2 \cosh(\mu L) - C_4 \cos(\mu L)] \end{cases} \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{kL^3}{EI} ; \quad \eta = \mu L$$

$$(3) \Rightarrow C_2 = C_4 \frac{\sin(\eta)}{\sinh(\eta)}$$

$$(4) \Rightarrow 2\lambda \sin(\eta) = \eta^3 \left[\sin(\eta) \frac{\cosh(\eta)}{\sinh(\eta)} - \cos(\eta) \right]$$

$$\Rightarrow 2\lambda \sin(\eta) \sinh(\eta) = \eta^3 [\sin(\eta) \cosh(\eta) - \cos(\eta) \sinh(\eta)]$$

$$\Rightarrow \eta = \eta_1, \eta_2, \dots \Rightarrow \omega_1, \omega_2, \dots$$

$$\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow \sin(\eta) = 0 ; \quad \eta = \mu L = n\pi$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{3A}} \Leftrightarrow \text{Diagram of a beam of length L with a spring at the right end. The beam is fixed at the left end and has a spring with stiffness k at the right end. The beam is labeled 'stål' (steel).}$$

$$\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow \eta \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_1 \rightarrow 0$$

(Man kan vrida att:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{8AL}} ; \lambda \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{Diagram of a beam of length L with a spring at the right end. The beam is fixed at the left end and has a spring with stiffness k at the right end. The beam is labeled 'stål' (steel).}$$

Krävs ej för full poäng)