

TENTAMEN, DEL 2
SF1544
NUMERISKA METODER, GRUNDKURS
Tisdag 11 mars 2025 kl 14.00-17.00

Rättas endast om Del 1 är godkänd.

Betygsgräns: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximalt antal poäng 50.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas detaljerat. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Inga hjälpmedel är tillåtna.

- P1.** Michaelis-Menten-ekvationen beskriver enzymatiska reaktioner där ett enzym omvandlar ett substrat (S) till en produkt (P). Ekvationen ges av

$$v = \frac{V_{max}C}{K_m + C}, \quad (1)$$

där v är reaktionshastigheten, C är koncentrationen av substratet, V_{max} är maximala reaktionshastigheten och K_m är Michaelis-konstanten.

I tabellen nedan finns experimentella data uppmätta en gång i minuten.

t [min]	0	1	2	3	4	5
C [mM]	5.0	4.6	4.3	4.1	4.0	3.9
v [μ M/min]	4.55	4.51	4.48	4.46	4.44	4.43

- (4 p) **a)** Värdena på tiden t och koncentrationen C i tabellen ska anpassas med hjälp av minsta kvadratmetoden till ett andragradspolynom, $C(t) = P_2(t)$.
Ställ upp det överbestämda linjära ekvationssystem som erhålls när alla värden på C och t i tabellen används för att bestämma $P_2(t)$. Element i matriser och vektorer ska tydligt framgå och värdena från tabellen ska användas. Du behöver inte lösa systemet.
- (4 p) **b)** Antag att du har löst minsta kvadrat-problemet, dvs beräknat koefficienterna i $P_2(t)$. Ange ett uttryck för minsta kvadrat-felet för det överbestämda ekvationssystemet i a)-uppgiften.

Nu ska du istället studera hur reaktionshastigheten v beror på koncentrationen C genom att bestämma konstanterna V_{max} och K_m i modellen (1) med hjälp av data i tabellen och minsta-kvadratmetoden.

- (6 p) **c)** Formulera om ekvationen (1) på formen $y(x) = ax + b$, så att data i tabellen ovan kan användas för att ställa upp ett linjärt minsta kvadrat-problem och bestämma konstanterna V_{max} och K_m . Relationerna mellan y, x, a, b och v, V_{max}, K_m, C ska tydligt framgå.
- (4 p) **d)** Ställ upp det överbestämda ekvationssystemet som fås genom att använda modellen i c)-uppgiften och all data i tabellen. Element i matriser och vektorer ska tydligt framgå. Du behöver inte lösa problemet.

P2. En seriekopplad RLC-krets beskrivs med differentialekvationen

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V(t), \quad (2)$$

där $Q(t)$ är laddningen på kondensatorn, $V(t)$ är en pålagd växelspanning och L, R, C är induktansen, resistansen och kapacitansen. Strömmen $I(t)$ ges av $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$. För att lösa ekvationen behövs initialvillkoren $Q(0) = Q_0$, $\frac{dQ(0)}{dt} = I_0$.

- (4 p) **a)** Formulera om ekvation (2) som ett system av första ordningens differentialekvationer. Glöm inte initialvillkoren.
- (6 p) **b)** Antag att L, R, C är kända konstanter och att $V(t)$ är en känd funktion. Formulera Euler bakåt för systemet i a)-uppgiften. Formulera ekvationssystemet som behöver lösas i varje tidssteg med Euler bakåt. Alla ingående storheter i ekvationssystemet ska vara definierade.
- (6 p) **c)** Antag nu att vi vill undersöka beteendet hos ett magnetiskt material där induktansen L är en funktion av strömmen I och beskrivs av sambandet

$$L(I) = \frac{L_0}{1 + \beta I^2},$$

där L_0 och β är kända konstanter. R, C antas fortsatt vara kända konstanter och $V(t)$ antas vara en känd funktion. Formulera ekvationssystemet som behöver lösas i varje tidssteg med Euler bakåt. Alla ingående storheter i ekvationssystemet ska vara definierade.

P3. En funktion f har mätts upp i N punkter (N jämnt tal) på intervallet $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} x_\ell &= \ell h, & \ell &= 0, 2, \dots, N-2, N, \\ x_\ell &= (\ell-1)h + 2h/3, & \ell &= 1, 3, \dots, N-3, N-1, \end{aligned}$$

med $h = 1/N$. Dvs vi känner $f(x_\ell)$, $\ell = 0, \dots, N$ där de första punkterna är $x_0 = 0$, $x_1 = 2h/3$, $x_2 = 2h$, osv.

Konstruera en kvadraturregel (dvs sätt upp en formel) för att approximera integralen av f på intervallet mellan 0 och 1. Gör detta genom att approximera f med ett styckvis linjärt polynom. Dvs på varje intervall x_ℓ till $x_{\ell+1}$ så approximeras f med det linjära polynom som går genom punkterna $(x_\ell, f(x_\ell))$ och $(x_{\ell+1}, f(x_{\ell+1}))$ och detta polynom integreras sedan exakt.

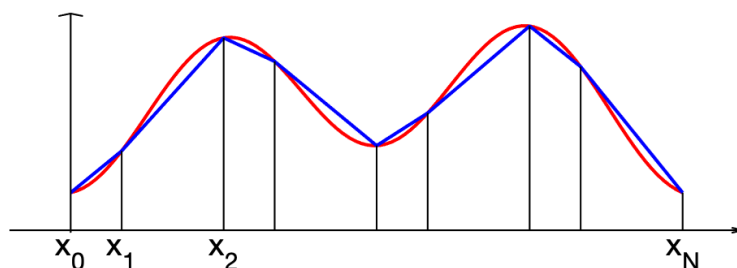


Figure 1: Sketch som visar en funktion $f(x)$ (röd kurva) och det styckvis linjära polynom som används för approximation.

- (6 p) **a)** Formulera först kvadraturregeln på intervallet $[0, 2h]$, dvs bestäm a_0 , a_1 och a_2 i formeln

$$\int_0^{2h} f(x) dx \approx a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2).$$

- (6 p) **b)** Formulera kvadraturregeln på hela intervallet, dvs ange $w_0, \dots, w_N$ i uttrycket

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{\ell=0}^N w_\ell f(x_\ell).$$

- (4 p) **c)** Vilken noggrannhetsordning förväntar du dig att kvadraturregeln i (b) har? Skulle du kunna konstruera en högre ordningens kvadraturregel med de data du har tillgängligt? Beskriv hur.