

KTH Fysik

Tentamen i **Fysikens matematiska metoder**

SI1200; SI1140 Del 2; SI1143

Fredagen den 7 juni 2024 kl 8:00 – 13:00

---

**Anteckna på varje blad:** namn, personnummer, och problemnummer.

**Tillåtna hjälpmedel:** bara formelsamlingen som delas ut

**Obs! Miniräknare ej tillåten.**

Notera gärna dina **bonuspoäng** på din tentamens första sida.

**Examinator:** Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

**Lösningar:** Kommer att finnas på kurshemsidan (Canvas)

**Motivera utförligt!** Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

**Inför och förklara konstanter och symboler du behöver!**

**Notation:**  $u_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$ ;  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ;  $x \in \mathbb{R}$  betyder  $-\infty < x < \infty$

**OBS:** Om inget annat skrivs så kan man få full poäng även om man inte beräknar alla integraler.

---

1. <sup>1</sup> Bestäm funktionen  $U(x, t)$ ,  $0 \leq x \leq L$  och  $t \geq 0$ , som uppfyller följande problem

$$\begin{cases} U_t(x, t) - aU_{xx}(x, t) = Ae^{-bt} & (0 < x < L, t > 0), \\ U(0, t) = 0, \quad U_x(L, t) = 0 & (t > 0), \\ U(x, 0) = 0 & (0 < x < L) \end{cases}$$

där  $a > 0$ ,  $L > 0$ ,  $A > 0$  och  $b > 0$  är konstanter. *Ledning:* En korrekt partikulärlösning till partiella differentialekvationen och randvillkoren kan ge 4p. (6p)

2. (a) Beräkna temperaturen  $T(r, t)$ ,  $0 \leq r \leq R$  och  $t \geq 0$ , som uppfyller

$$\begin{aligned} T_t(r, t) - a\left(T_{rr}(r, t) + \frac{2}{r}T_r(r, t)\right) &= 0 \quad (0 < r < R, t > 0), \\ |T(0, t)| < \infty, \quad T(R, t) &= T_0 \quad (t > 0) \\ T(r, 0) &= T_1 \quad (0 < r < R) \end{aligned}$$

där  $R > 0$ ,  $a > 0$ ,  $T_0 > 0$  och  $T_1 > T_0$  är konstanter. Alla integraler skall beräknas för full poäng. *Ledning:* Vi rekommenderar att du börjar med att svara på frågan (b) nedan.  $\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x)$ . (4p) (b) Ange en detaljerad fysikalisk tolkning av problemet i (a). (2p)

(v.g.v.)

---

<sup>1</sup>Dina bonuspoäng från hemtalen under VT2024 adderas till dina poäng på uppgift 1, dock kan du maximalt få 6 poäng från uppgift 1 och hemtalen tillsammans.

3. Du skall beräkna stationära hastighetsväktet  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$  hos en vätska som strömmar förbi en cylinder med radie  $R$ . Hastighetsfältet är rotationsfritt,  $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , divergensfritt,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , projektionen av hastighetsfältet på normalriktningen  $\mathbf{n}$  vid cylinderns randyta är noll,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$  vid  $\sqrt{x^2 + y^2} = R$ , och hastigheten blir konstant och parallel med  $x$ -axeln långt från cylindern,  $\mathbf{v} \rightarrow v_0 \mathbf{e}_x$  när  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  där  $v_0 > 0$  är en konstant. *Ledning:* Visa att  $\mathbf{v}$  kan framställas som gradient av en potential  $\Phi$ , ställ upp ekvationer som  $\Phi$  skall uppfyller, och beräkna  $\Phi$  och  $\mathbf{v}$ . Använd lämpliga kroklinjiga koordinater. Du kan anta att  $\mathbf{v}$  är  $z$ -oberoende och att  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v} = 0$ . (6p)
4. (a) Du skall beräkna elektriska potentialen  $U(x, y, z)$  i området  $x \geq 0, y \geq 0, z \in \mathbb{R}$  i följande situation. (i) Det finns en punktladdning  $Q$  i punkten  $(x, y, z) = (a, 2a, 0)$  där  $a > 0$ , (ii) randytan  $x = 0$  är jordat, dvs.,  $U = 0$  vid  $x = 0$ , (iii) normalriktningen av elektriska fältet  $\mathbf{E}$  är noll vid randytan  $y = 0$ , dvs.,  $\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{E} = 0$  vid  $y = 0$ . *Ledning:* Ställ upp en matematisk modell för  $U$ . Kom ihåg att  $\mathbf{E} = -\nabla U$  och  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$  där  $\rho(\mathbf{r}) = Q\delta(x - a)\delta(y - 2a)\delta(z)$  är laddningstätheten. (4p)
- (b) Ange definitionen av Greensfunktionen till problemet i (a). (Du behöver inte beräkna Greensfunktionen.) (2p)
5. (a) Beräkna tidutvecklingen av lufttrycket  $p = p(\mathbf{r}, t)$  inom området  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq R, 0 \leq z \leq R$  om

$$p(\mathbf{r}, t = 0) = \begin{cases} 2p_0 & (0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < R/2) \\ p_0 & (R/2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R) \end{cases}$$

och  $p_t(\mathbf{r}, t = 0) = 0$ , där  $p_0 > 0$  är en konstant. Lufttrycket uppfyller vågekvationen  $p_{tt} - c^2 \Delta p = 0$ , och normalderivatan  $\mathbf{n} \cdot \nabla p$  är lika med 0 vid randen av området ( $c > 0$  är en konstant). (5p) (b) Ge en fysikalisk tolkning av randvillkoret i (a). (1p)

6. Låt  $y(x)$  vara en kurva i  $xy$ -planet som går mellan punkterna  $(x_1, y_1) = (0, a)$  och  $(x_2, y_2) = (a, a)$  där  $a > 0$  ( $0 \leq x \leq a$ ). Genom att rotera kurvan kring  $x$ -axel genereras en rotationsyta  $S$  i  $\mathbb{R}^3$ . Bestäm funktionen  $y(x)$  så att arean av  $S$  blir extremal. *Ledning:*

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \operatorname{arcosh}(\xi)$$

där  $\operatorname{arcosh}(\xi)$  är inverse till  $\cosh(\xi)$  ( $\cosh(\xi) = \frac{1}{2}(e^\xi + e^{-\xi})$ ). (6p)

LYCKA TILL!

**Lösningsföreslag till tentamen i Fysikens matematiska metoder 240308**  
 I TYPED THIS QUICKLY: PLEASE LET ME KNOW BY EMAIL IF YOU FIND  
 ANY MISTAKES/TYPOS. THANKS.

1. Ansatsen

$$U(x, t) = \sum_n f_n(x) g_n(t)$$

ger egenfunktioner  $f_n(x)$  och egenvärdena  $\lambda_n$  som lösning av problemet

$$-f''(x) = \lambda f(x), \quad f(0) = f'(L) = 0.$$

Detta ger

$$f_n(x) = \sin(k_n x), \quad \lambda_n = k_n^2, \quad k_n = (n - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

och

$$g'_n(t) + a k_n^2 g_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L A e^{-bt} \sin(k_n x) dx \equiv C_n e^{-bt}, \quad g_n(0) = 0$$

där

$$C_n = \frac{2A}{L} \int_0^L \sin(k_n x) dx = \frac{2A}{L k_n} (1 - \cos(k_n L)).$$

En partikulärlösning till  $g_n$ -problemet är  $C_n e^{-bt} / (-b + a k_n^2)$ , och allmänna lösningen är

$$g_n(t) = c_n e^{-a k_n^2 t} + \frac{C_n}{-b + a k_n^2} e^{-bt}.$$

med godtyckliga konstanter  $c_n$ . Villkoret  $g_n(0) = 0$  ger

$$c_n = -\frac{C_n}{-b + a k_n^2}.$$

Detta ger

$$g_n(t) = \frac{C_n}{-b + a k_n^2} \left( -e^{-a k_n^2 t} + e^{-bt} \right).$$

Svar:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{-b + a k_n^2} \left( -e^{-a k_n^2 t} + e^{-bt} \right) \sin(k_n x), \quad k_n = (n - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{L}$$

där

$$C_n = \frac{2A}{L k_n} (1 - \cos(k_n L)).$$

**Alternative solution (sketchy):** We first try to find a particular solution  $U_{part}(x, t) = f(x)e^{-bt}$  to the PDE and BC (boundary conditions). Inserting this into the PDE and BC we obtain

$$f''(x) + \frac{b}{a} f(x) = -\frac{A}{a}, \quad f(0) = f'(L) = 0.$$

This ODE has the general solution

$$f(x) = -\frac{A}{a} + c_1 \cos(Kx) + c_2 \sin(Kx), \quad K := \sqrt{\frac{b}{a}}$$

and the boundary conditions give the following conditions,

$$-\frac{A}{a} + c_1 = 0, \quad -c_1 K \sin(KL) + c_2 K \cos(KL) = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{A}{a}, \quad c_2 = \frac{A}{a} \tan(KL).$$

Thus,

$$\boxed{f(x) = \frac{A}{a} \left( -1 + \cos(Kx) + \tan(KL) \sin(Kx) \right)}$$

where we assume that  $KL$  is such that  $\tan(KL)$  is finite (no resonance).

The ansatz

$$U(x, t) = f(x)e^{-bt} + u(x, t)$$

leads to a standard homogeneous problem for  $u(x, t)$  (I do not give details on how to solve this, but this solution would be required for full points in case you use this second method).

2. (a) Ansatsen

$$T(r, t) = T_0 + \sum_n f_n(r) g_n(t)$$

ger

$$-f''(r) - \frac{2}{r}f(r) = \lambda f(r), \quad |f(0)| < \infty, \quad f(R) = 0$$

som har lösningar

$$f_n(r) = \frac{\sin(k_n r)}{r}, \quad \lambda_n = k_n^2, \quad k_n = n \frac{\pi}{R} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

ODE problemet för  $g_n(t)$  blir

$$\dot{g}_n(t) + a k_n^2 g_n(t) = 0,$$

$$g_n(0) = \frac{\int_0^R (T_1 - T_0)(1/r) \sin(k_n r) r^2 dr}{\int_0^R (T_1 - T_0)[(1/r) \sin(k_n r)]^2 r^2 dr} = \frac{2(T_1 - T_0)}{R} \int_0^R \sin(k_n r) r dr$$

$$= \frac{2(T_1 - T_0)}{R k_n^2} \int_0^{k_n R} \sin(x) x dx = \frac{2(T_1 - T_0)}{R k_n^2} (-k_n R \cos(k_n R)) = \frac{2(T_1 - T_0)}{k_n} (-1)^{n-1}.$$

Lösningen till ODE är

$$g_n(t) = g_n(0) e^{-a k_n^2 t}.$$

Svar:

$$T(r, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(T_1 - T_0) (-1)^{n-1} \frac{\sin(k_n r)}{k_n r} e^{-a k_n^2 t}, \quad k_n = n \frac{\pi}{R}.$$

(b) Temperturen i ett sfäriskt homogent område med radie  $R$ . Randtemperaturen är alltid lika med  $T_0$ , och temperaturen vid tiden  $t = 0$  är konstant och lika med  $T_1$ . (T.ex., ett homogent klot med radie  $R$  och temperatur  $T_1$  kastas vid tiden  $t = 0$  i en vätska med temperatur  $T_0$ , och man skall beräkna temperaturutvecklingen inom klotet.)

3. Ett vektorfält som är rotationsfritt kan alltid skrivas som gradient av ett skalärfält:  $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ .  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  ger

$$\Delta\Phi = 0.$$

Villkoren är

$$\Phi \rightarrow v_0 x \quad (r \rightarrow \infty)$$

och

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi|_{|r|=R} = 0.$$

Vi inför polära koordinater  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ; detta ger

$$\Phi_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r}\Phi_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}\Phi_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = 0,$$

$$\Phi(r, \varphi) \rightarrow v_0 r \cos(\varphi) \quad (r \rightarrow \infty), \quad \Phi_r(R, \varphi) = 0.$$

Ansatsen  $\Phi(r, \varphi) = f(r) \cos \varphi$  ger

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - f(r) = 0, \quad f(r) \rightarrow v_0 r \quad (r \rightarrow \infty), \quad f'(R) = 0.$$

Allmänna lösningen till  $f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - f(r) = 0$  är

$$f(r) = c_1 r + c_2 \frac{1}{r}$$

(kan man få med ansatsen  $f(r) = r^n$ ; ODE:n ger  $n = \pm 1$ ). Första villkoret ger  $c_1 = v_0$ , och andra villkoret ger  $c_r - c_2/R^2 = 0$ . Svaret blir  $f(r) = v_0(r + R^2/r)$ . Detta ger

$$\Phi(r, \varphi) = v_0 \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \varphi = v_0 x \left( 1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right).$$

Detta ger

$$\mathbf{v} = \nabla v_0 x \left( 1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) = v_0 \left( 1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 R^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2xy R^2}{(x^2 + y^2)^2}, 0 \right).$$

4. (a) Problemet kan lösas med spegling: udda spegling med avseende av  $y$ ; jämn spegling med avseende av  $y$ . Dette ger följande problem för funktionen  $\tilde{U}(\mathbf{r})$  and  $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$-\Delta \tilde{U}(\mathbf{r}) = Q \left( \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_4) \right)$$

där

$$\mathbf{r}_1 = (a, 2a, 0), \quad \mathbf{r}_2 = (-a, 2a, 0), \quad \mathbf{r}_3 = (a, -2a, 0), \quad \mathbf{r}_4 = (-a, -2a, 0).$$

Greensfunktionen  $1/4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  till Laplaces ekvation i  $\mathbb{R}^3$  ger lösningen direkt:

$$\tilde{U}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_4|} \right)$$

ekvivalent med

$$\tilde{U}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-2a)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + (y-2a)^2 + z^2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y+2a)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + (y+2a)^2 + z^2}} \right).$$

[CHECK:  $U|_{x=0} = 0$ : OK]

(b) Greensfunktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  till problemet är lika med lösningen  $U(\mathbf{r})$  till följande problem,

$$-U_{xx}(x, y, z) - U_{yy}(x, y, z) - U_{zz}(x, y, z) = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \quad (x > 0, y > 0, z \in \mathbb{R})$$

$$U(0, y, z) = 0 \quad (y > 0, z \in \mathbb{R}), \quad U_y(x, 0, z) = 0 \quad (x > 0, z \in \mathbb{R})$$

$$(\mathbf{r} = (x, y, z), \mathbf{r}' = (x', y', z')).$$

5. Vi använder cylinderkoordinater:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z$ . Problemet är rotationssymmetriskt:  $p = p(r, z, t)$  oberoende av  $\varphi$ .

Problemet blir då

$$\begin{aligned} p_{tt}(r, z, t) - c^2 \Delta p(r, z, t) &= 0, \\ p_r(R, z, t) &= 0, \quad p_z(r, 0, t) = 0, \quad p_z(r, R, t) = 0, \\ p(r, z, 0) &= f(r) \end{aligned} \tag{1}$$

där  $f(r) = 2p_0$  om  $0 \leq r \leq R/2$  och  $f(r) = p_0$  om  $R/2 < r < R$ ;  $\Delta p = p_{rr} + (1/r)p_r + p_{zz}$ .

Randvillkoret vid  $z = 0$  och  $z = R$  ger  $g = g(r, t)$  oberoende av  $z$ . Problemet kan lösas med ansatsen

$$g(r, t) = \sum_n f_n(r) g_n(t)$$

där  $f_n(r)$  är lösningar till problemet

$$-f''(r) - \frac{1}{r}f'(r) = \lambda f(r), \quad |f(0)| < \infty, \quad f'(R) = 0$$

som har lösningar

$$f_n(r) = J_0(k_n r), \quad k_n = \frac{\beta_n}{R}$$

där  $\beta_n$  är nollställarna till  $J'_0(z)$ :  $J'_0(\beta_n) = 0$ . (Om man vet mer om teorin av Besselfunktionerna då vet man att  $J'_0(z) = -J_1(z)$ , och  $\beta_n = \alpha_{n,1}$  är nollställarna till  $J_1(z)$ ).

6. Areal är

$$A[y] = \int_0^a 2\pi y(x) ds = \int_0^a 2\pi \underbrace{y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2}}_{F=F(y(x), y'(x))} dx.$$

Euler-Lagrange ekvationer till funktionalen  $A[y]$  har en första integral

$$C = y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = \frac{(y')^2 y}{\sqrt{1 + (y')^2}} - y \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} (y(y')^2 - y(1 + (y')^2)) = -\frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Det ger

$$(y/C)^2 = 1 + y'(x)^2 \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{(y/C)^2 - 1}} = \pm dx \Rightarrow C[\operatorname{arcosh}(y/C) - A] = \pm x$$

där  $A = \operatorname{arcosh}(0)$ , och

$$y(x) = C \cosh(x/C - B)$$

där  $B = \pm A$ .  $y(0) = a$  och  $y(a) = a$  ger

$$C \cosh(B) = a, \quad C \cosh(a/C - B) = a.$$

$\cosh(B) = \cosh(a/C - B)$  lösas av  $B = a/C - B$ , dvs.,  $B = a/2C$ .  $C \cosh(a/2C) = a$  lösas av  $a/C = \cosh(a/2C)$ . Detta kan lösas numeriskt:  $a/C = b \approx 1.178775527$  (det kan inte förväntas i tentamen, förstaass). Detta ger  $C = a/b$  och  $B = b/2$ .

Svar:

$$y(x) = \frac{a}{b} \cosh(xb/a - b/2), \quad b \approx 1.178775527.$$