



SF1672 (SF1604) Linjär Algebra
Tentamen
Torsdagen 10 januari, 2019

Skrivtid: 8:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av två delar; A och B, som vardera ger maximalt 20 poäng. Erhållna bonuspoäng adderas till del A såvitt inte totalsumman på del A överstiger 20 poäng.

Preliminära betygsgränser är

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Poäng	32	28	24	20	18	17

DEL A

1. Bestäm matrisen X när vi har att $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **(4 p)**

2. Avbildningen $T_A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ges av matrisen

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -20 & 0 & 10 & -10 \\ 64 & 16 & -18 & 22 \\ 14 & 16 & 7 & -3 \\ -46 & 16 & 37 & -33 \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att noll-rummet N_A till T_A har dimension 2. **(2 p)**

(b) Bestäm en linjär avbildning $S: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ vars bildrum är N_A . **(2 p)**

(c) Visa att $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ är en egenvektor med egenvärde 2. **(2 p)**

(d) Ett egenvärde till A är -5 . Är T_A diagonaliserbar? **(2 p)**

(e) Bestäm determinanten $\det(A^3)$. **(2 p)**

(f) Bestäm egenvärdena till A^3 . **(2 p)**

3. Planet H_1 ges av ekvationen $3x + 4y - 5z = 0$, och planet H_2 ges av $3x + 4y - 5z = 20$.

(a) Bestäm avståndet mellan planen H_1 och H_2 . **(2 p)**

(b) Bestäm en ekvation för planet H som är ortogonal mot H_2 och som är sådan att skärningen med H_1 är linjen $\ell = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$. **(2 p)**

DEL B

4. Visa följande påståenden. (4 p)

- (a) Lösningssmängden till ett homogent ekvationssystem i n okända är ett delrum i $\mathbb{R}^n$.
 (b) Ett delrum i $\mathbb{R}^n$ är lösningssmängden till ett homogent ekvationssystem i n okända.

5. På vektorrummet P_3 av polynom av grad ≤ 3 har vi indreproduktstrukturen

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 fg \, dt.$$

Låt $S: P_3 \rightarrow P_3$ vara avbildningen $S(f) = 5 \operatorname{proj}_V(f) - 2f$ där V är delrummet som spänns upp av vektorerna $1 + 2t + t^2$ och $t + t^2 + 3t^3$.

- (a) Bestäm matrisrepresentationen D för avbildningen S med avseende på någon bas β av egenvektorer (basen β behöver inte bestämmas). (2 p)
 (b) Är avbildningen S ortogonalt diagonaliserbar? (2 p)
 (c) Låt D och β vara som i uppgift a). Basen γ definieras genom att låta

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

vara övergångsmatrisen från basen γ till basen β . Låt A vara matrisrepresentationen för S i basen γ . Bestäm en av följande fyra matriser (ange vilken) $P^{-1}AP$, PAP^{-1} , $P^{-1}DP$, eller PDP^{-1} . (2 p)

6. Låt M vara en (4×3) matris, och låt $V \subseteq \mathbb{R}^4$ vara det linjära höljet av kolumnerna i M . Vi definierar vektorn $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^4$ som

$$\vec{v} = \vec{v}(M) = [\det(M_1) \quad -\det(M_2) \quad \det(M_3) \quad -\det(M_4)]^T,$$

där M_i är matrisen vi får när rad i tas bort från matrisen M ($i = 1, 2, 3, 4$).

- (a) Visa att vektorn $\vec{v}$ är ortogonal på V . (2 p)
 (b) Visa att om $\dim(V) = 3$ så är $\vec{v} \neq \vec{0}$. (2 p)

7. Fibonaccisekvensen $0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$ definieras rekursivt som $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, där $f_0 = 0$ och $f_1 = 1$. Visa att

$$f_n = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{(1+\alpha)^n}{2^n} - \frac{(1-\alpha)^n}{2^n} \right],$$

för alla $n \geq 0$, där $\alpha = \sqrt{5}$. (6 p)
