

TENTAMEN TEORETISK FYSIK SI1155

Tisdag 2025-05-27 kl 08:00-13:00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag

Hjälpmedel BETA, miniräknare, linjal, formelblad på skrivningens sida 3-5

Poängsättning 6 poäng per problem

Examinator Mats Wallin tel 073 765 2000

1. Ett elektronspinn är i tillståndet

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle + i|-x\rangle)$$

där $|+x\rangle$ betecknar spinn upp och $|-x\rangle$ spinn ner i x-riktningen.

(a) Beräkna $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$, $\langle S_z \rangle$ och $\langle S^2 \rangle$.

(b) Beräkna ΔS_x , ΔS_y , ΔS_z och ΔS^2 .

2. (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till spinnoperatoren $S_x \cos \phi + S_y \sin \phi$.

(b) En elektron med spinn upp i z-riktningen passerar genom en Stern-Gerlach apparat som gör en mätning av $S_x \cos \phi + S_y \sin \phi$. Vad är sannolikheten att mätningen ger spinn upp?

3. (a) Ett system har Hamiltonoperatoren

$$H = \frac{L^2}{2I} + aL_z$$

där L^2, L_z är rörelsemängdsmomentoperatorer och I, a är konstanter. Vad är energiegenvärdena och egenfunktionerna?

(b) Ett system har Hamiltonoperatoren

$$H = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I_1} + \frac{L_z^2}{2I_3}$$

där I_1, I_3 är konstanter. Vad är energiegenvärdena och egenfunktionerna?

VÄND!

4. Beräkna första ordningens korrektion till vätes grundtillståndsenergi från den relativistiska störningen

$$V = -\frac{p^4}{8m^3c^2}$$

5. För icke växelverkande identiska partiklar är medelockupationstalen

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} \pm 1}$$

där + är för fermioner och - för bosoner. Beräkna relativa medelavvikelsen som definieras

$$\frac{\delta n_k}{\langle n_k \rangle} = \frac{\sqrt{\langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2}}{\langle n_k \rangle}$$

Studera både fallet då partiklarna är fermioner och när de är bosoner.

LYCKA TILL!

LÖSNINGAR

1. Ett elektronspinn är i tillståndet

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle + i|-x\rangle)$$

där $|+x\rangle$ betecknar spinn upp och $|-x\rangle$ spinn ner i x-riktningen.

(a) Beräkna $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$, $\langle S_z \rangle$ och $\langle S^2 \rangle$.

(b) Beräkna ΔS_x , ΔS_y , ΔS_z och ΔS^2 .

(a) Skriv spinttillståndet på matrisform:

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle + i|-x\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \frac{1}{4}(1-i, 1+i) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{8}(1-i, 1+i) \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{8}((1-i)^2 + (1+i)^2) = \frac{\hbar}{8}((1-2i-1) + (1+2i-1)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle S_y \rangle &= \frac{1}{4}(1-i, 1+i) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{8}(1-i, 1+i) \begin{pmatrix} -1-i \\ -1+i \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{8}(-(1-i)(1+i) - (1+i)(1-i)) = -\frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle &= \frac{1}{4}(1-i, 1+i) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{8}(1-i, 1+i) \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{8}((1-i)(1+i) + (1+i)(-1+i)) = 0 \end{aligned}$$

$$\langle S^2 \rangle = \langle \chi | \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \chi \rangle = \frac{3\hbar^2}{4} \langle \chi | \chi \rangle = \frac{3\hbar^2}{4}$$

SVAR:

$$\langle S_x \rangle = \langle S_z \rangle = 0, \langle S_y \rangle = -\frac{\hbar}{2}, \langle S^2 \rangle = \frac{3\hbar^2}{4}$$

(b) Eftersom $S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = S^2/3$ blir

$$\langle S_x^2 \rangle = \langle S_y^2 \rangle = \langle S_z^2 \rangle = \frac{\langle S^2 \rangle}{3} = \frac{\hbar^2}{4}$$

Detta ger

$$\Delta S_x = \sqrt{\langle S_x^2 \rangle - \langle S_x \rangle^2} = \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta S_y = \sqrt{\langle S_y^2 \rangle - \langle S_y \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} - \left(-\frac{\hbar}{2}\right)^2} = 0$$

$$\Delta S_z = \frac{\hbar}{2}$$

Bestäm slutligen osäkerheten i S^2 :

$$\langle S^4 \rangle = \langle \chi | \left(\frac{3\hbar^2}{4} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 | \chi \rangle = \left(\frac{3\hbar^2}{4} \right)^2$$

$$\Delta S^2 = \sqrt{\langle S^4 \rangle - \langle S^2 \rangle^2} = \sqrt{\left(\frac{3\hbar^2}{4} \right)^2 - \left(\frac{3\hbar^2}{4} \right)^2} = 0$$

SVAR:

$$\Delta S_x = \Delta S_z = \frac{\hbar}{2}, \Delta S_y = 0, \Delta S^2 = 0$$

Kommentar: En enklare lösning kan fås eftersom tillståndet kan skrivas som $|\chi\rangle = \frac{1+i}{\sqrt{2}}|-y\rangle$. Konstanten $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ kan strykas och tillståndet bytas mot $|\chi\rangle = |+y\rangle$ utan att några väntevärden ändras. Då fås direkt $\langle S_y \rangle = -\hbar/2, \langle S_x \rangle = \langle S_z \rangle = 0$ osv.

2. (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till spinnoperatoren $S_x \cos \phi + S_y \sin \phi$.
 (b) En elektron med spinn upp i z-riktningen passerar genom en Stern-Gerlach apparat som gör en mätning av $S_x \cos \phi + S_y \sin \phi$. Vad är sannolikheten att mätningen ger spinn upp?

(a) Spinnoperatoren i riktningen $\mathbf{n} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ för spinn 1/2 blir

$$\begin{aligned} S_n &= S_x \cos \phi + S_y \sin \phi = \frac{\hbar}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cos \phi + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sin \phi \right] \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cos \phi - i \sin \phi \\ \cos \phi + i \sin \phi & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sök egenvärden på formen $\frac{\hbar}{2}\lambda$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

dvs egenvärdena är $\pm \frac{\hbar}{2}$ som väntat. Egenvektorer: $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$\lambda = 1 \Rightarrow -a + e^{-i\phi}b = 0 \Rightarrow | + n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow +a + e^{-i\phi}b = 0 \Rightarrow | - n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

SVAR: Egenvärdena är $\pm \hbar/2$ och egenvektorerna är

$$|\pm n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

(b) Sannolikheten att en elektron i tillståndet $| + z \rangle$ ger spinn upp vid en mätning av $S_n = S_x \cos \phi + S_y \sin \phi$ blir

$$P_+ = |c_+|^2 = |\langle + n | + z \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (1, e^{-i\phi}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Alltså är sannolikheten oberoende av ϕ och blir samma i alla riktningar i xy-planet. Detta är naturligt eftersom koordinatsystemet kan väljas i vilken riktning som helst i xy-planet utan att det påverkar resultatet av en mätning av spinn med bestämd z-komponent.

SVAR: $P_+ = 1/2$

3. (a) Ett system har Hamiltonoperatoren

$$H = \frac{L^2}{2I} + aL_z$$

där L^2, L_z är rörelsemängdsmomentoperatorer och I, a är konstanter. Vad är energiegenvärdena och egenfunktionerna?

(b) Ett system har Hamiltonoperatoren

$$H = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I_1} + \frac{L_z^2}{2I_3}$$

där I_1, I_3 är konstanter. Vad är energiegenvärdena och egenfunktionerna?

(a) Energiegenfunktionerna är helt enkelt klotfunktionerna Y_l^m eftersom

$$HY_l^m = \frac{1}{2I}L^2Y_l^m + aL_zY_l^m = \frac{1}{2I}l(l+1)\hbar^2Y_l^m + am\hbar Y_l^m = E_{lm}Y_l^m$$

där energiegenvärdena är

$$E_{lm} = \frac{1}{2I}l(l+1)\hbar^2 + am\hbar$$

(b) Skriv om H som

$$H = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I_1} + \frac{L_z^2}{2I_3} = \frac{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}{2I_1} + \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1}\right)L_z^2 = \frac{L^2}{2I_1} + \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1}\right)L_z^2$$

Energiegenfunktionerna är klotfunktionerna Y_l^m :

$$\begin{aligned} HY_l^m &= \frac{1}{2I_1}L^2Y_l^m + \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1}\right)L_z^2Y_l^m \\ &= \frac{1}{2I_1}l(l+1)\hbar^2Y_l^m + \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1}\right)m^2\hbar^2Y_l^m = E_{lm}Y_l^m \end{aligned}$$

där energiegenvärdena är

$$E_{lm} = \frac{1}{2I_1}l(l+1)\hbar^2 + \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1}\right)m^2\hbar^2$$

4. Beräkna första ordningens korrektion till vätes grundtillståndsenergi från den relativistiska störningen

$$V = -\frac{p^4}{8m^3c^2}$$

Lösningsmetod 1: Ickedegenererad störningsräkning fungerar eftersom degenerationen är i spinnet som inte ingår i störningen. Grundtillståndet är $\Psi_{100} = e^{-r/a}/\sqrt{\pi a^3}$. Energikorrektionen blir

$$E_1^1 = \langle 100|V|100 \rangle = -\frac{1}{8m^3c^2} \langle 100|p^4|100 \rangle$$

Beräkna p^4 med följande identitet:

$$\begin{aligned} H^0 &= \frac{p^2}{2m} + V^0 \Rightarrow p^2 = 2m(H^0 - V^0) \\ \Rightarrow p^4 &= 4m^2(H^0 - V^0)^2 = 4m^2((H^0)^2 - H^0V^0 - V^0H^0 + (V^0)^2) \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} E_1^1 &= -\frac{4m^2}{8m^3c^2} \langle 100|(H^0)^2 - H^0V^0 - V^0H^0 + (V^0)^2|100 \rangle \\ &= -\frac{1}{2mc^2} (E_1^2 - 2E_1 \langle 100|V^0|100 \rangle + \langle 100|(V^0)^2|100 \rangle) \end{aligned}$$

Beräkna väntevärdena av $V^0 = K/r$ och $(V^0)^2$ där $K = -e^2/(4\pi\epsilon_0)$:

$$\begin{aligned} \langle V^0 \rangle &= K \frac{1}{\pi a^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2r/2}}{r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= K \frac{4\pi}{\pi a^3} \int_0^\infty r e^{-2r/2} dr = K \frac{4}{a^3} \frac{a^2}{4} = \frac{K}{a} \\ \langle (V^0)^2 \rangle &= K^2 \frac{1}{\pi a^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2r/2}}{r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= K^2 \frac{4\pi}{\pi a^3} \int_0^\infty e^{-2r/2} dr = K^2 \frac{4}{a^3} \frac{a}{2} = \frac{2K^2}{a^2} \end{aligned}$$

Samla ihop och förenkla mha $E_1 = K/(2a) \Rightarrow K/a = 2E_1$.

$$E_1^1 = -\frac{1}{2mc^2} \left((E_1)^2 - 2E_1 \frac{K}{a} + \frac{2K^2}{a^2} \right) = -\frac{1}{2mc^2} ((E_1)^2 - 4(E_1)^2 + 8(E_1)^2) = -\frac{5(E_1)^2}{2mc^2}$$

SVAR: Första ordningens relativistiska korrektion till vätes grundtillståndsenergi är

$$E_1^1 = -\frac{5(E_1)^2}{2mc^2}$$

Lösningsmetod 2: Utnyttja att p^2 är Hermitesk:

$$\langle p^4 \rangle = \langle p^2 \psi | p^2 \psi \rangle = \iiint | -\hbar^2 \nabla^2 \psi |^2 dV = \frac{4\pi\hbar^4}{\pi a^3} \int_0^\infty |\nabla^2 e^{-r/a}|^2 r^2 dr$$

Beräkna mha Laplacianen i sfäriska koordinater vid sfärisk symmetri:

$$\begin{aligned} \nabla^2 e^{-r/a} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial e^{-r/a}}{\partial r} \right) = \left(-\frac{2}{ar} + \frac{1}{a^2} \right) e^{-r/a} \\ \Rightarrow |\nabla^2 e^{-r/a}|^2 &= \left(\frac{4}{a^2 r^2} - \frac{4}{a^3 r} + \frac{1}{a^4} \right) e^{-2r/a} \end{aligned}$$

Detta ger

$$\langle p^4 \rangle = \frac{4\hbar^4}{a^3} \int_0^\infty \left(\frac{4}{a^2} - \frac{4r}{a^3} + \frac{r^2}{a^4} \right) e^{-2r/a} dr = \frac{4\hbar^4}{a^3} \frac{5}{4a} = \frac{5\hbar^4}{a^4}$$

Slutligen blir

$$E_1^1 = -\frac{\langle p^4 \rangle}{8m^3 c^2} = -\frac{5\hbar^4}{8m^3 c^2 a^4}$$

Kontrollera att svaret stämmer med metod 1. $E_1 = -e^2/(4\pi\epsilon_0 \cdot 2a)$ och $a = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2/(me^2) \Rightarrow e^2/(4\pi\epsilon_0) = \hbar^2/(ma)$ ger

$$E_1^1 = -\frac{5(E_1)^2}{2mc^2} = -\frac{5}{2mc^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{4a^2} = -\frac{5\hbar^4}{8m^3 c^2 a^4}$$

OK.

Lösningsmetod 3: Brute force innehåller en intressant fallgrop. Följande räkning ger fel svar:

$$\langle p^4 \rangle = \int \psi^* \hbar^4 \nabla^4 \psi dV = \frac{4\pi\hbar^4}{\pi a^3} \int_0^\infty e^{-r/a} \nabla^4 e^{-r/a} r^2 dr$$

Laplacianen i kvadrat (sk bi-Laplacianen) i sfäriska koordinater vid sfärisk symmetri ger

$$\nabla^4 e^{-r/a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial e^{-r/a}}{\partial r} \right) \right) \right) = \left(-\frac{4r}{a^3} + \frac{r^2}{a^4} \right) e^{-r/a}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \langle p^4 \rangle &= \frac{4\hbar^4}{a^3} \int_0^\infty \left(-\frac{4r}{a^3} + \frac{r^2}{a^4} \right) e^{-2r/a} dr = -\frac{4\hbar^4}{a^3} \frac{3}{4a} = -\frac{3\hbar^4}{a^4} \\ \Rightarrow E_1^1 &= -\frac{\langle p^4 \rangle}{8m^3c^2} = +\frac{3\hbar^4}{8m^3c^2a^4}\end{aligned}$$

vilket är fel svar: fel tecken och fel numerisk koefficient. Problemet är att en singular term i derivatan missats.

Så här är den korrekta räkningen. Mha $\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + g\nabla^2f + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g)$, $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(r)$, $\nabla r = \mathbf{r}/r = \mathbf{e}_r$ och resultatet för $\nabla^2 e^{-r/a}$ från metod 2 fås

$$\begin{aligned}\nabla^4 e^{-r/a} &= \nabla^2 \nabla^2 e^{-r/a} = \nabla^2 \left(-\frac{2}{ar} + \frac{1}{a^2} \right) e^{-r/a} \\ &= e^{-r/a} \nabla^2 \left(-\frac{2}{ar} + \frac{1}{a^2} \right) + \left(-\frac{2}{ar} + \frac{1}{a^2} \right) \nabla^2 e^{-r/a} + 2 \left(-\nabla \frac{2}{ar} \right) \cdot (\nabla e^{-r/a}) \\ &= \frac{8\pi}{a} \delta^3(r) + \left(-\frac{2}{ar} + \frac{1}{a^2} \right)^2 e^{-r/a} - \frac{4\mathbf{e}_r}{ar^2} \cdot \frac{\mathbf{e}_r}{a} e^{-r/a} \\ &= \frac{8\pi}{a} \delta^3(r) + \left(-\frac{4}{a^3r} + \frac{1}{a^4} \right) e^{-r/a}\end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\langle p^4 \rangle &= \frac{\hbar^4}{\pi a^3} \left[\iiint \frac{8\pi}{a} \delta^3(r) dV + \int_0^\infty \left(-\frac{4}{a^3r} + \frac{1}{a^4} \right) e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr \right] \\ &= \frac{\hbar^4}{\pi a^3} \left(\frac{8\pi}{a} - 4\pi \frac{3}{4a} \right) = \frac{5\hbar^4}{a^4} \\ \Rightarrow E_1^1 &= -\frac{\langle p^4 \rangle}{8m^3c^2} = -\frac{5\hbar^4}{8m^3c^2a^4}\end{aligned}$$

5. För icke växelverkande identiska partiklar är medelockupationstalen

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} \pm 1}$$

där + är för fermioner och - för bosoner. Beräkna relativa medelavvikelsen som definieras

$$\frac{\delta n_k}{\langle n_k \rangle} = \frac{\sqrt{\langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2}}{\langle n_k \rangle}$$

Studera både fallet då partiklarna är fermioner och när de är bosoner.

Fermioner:

$$\begin{aligned} \langle n_k^2 \rangle &= \frac{\sum_{n_k=0,1} n_k^2 e^{-\beta(E_k - \mu)n_k}}{\sum_{n_k=0,1} e^{-\beta(E_k - \mu)n_k}} = \frac{e^{-\beta(E_k - \mu)}}{1 + e^{-\beta(E_k - \mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1} = \langle n_k \rangle \\ \frac{\delta n_k}{\langle n_k \rangle} &= \sqrt{\frac{\langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2}{\langle n_k \rangle^2}} = \sqrt{\frac{\langle n_k \rangle - \langle n_k \rangle^2}{\langle n_k \rangle^2}} = \sqrt{\frac{1}{\langle n_k \rangle} - 1} \\ &= \sqrt{e^{\beta(E_k - \mu)}} = e^{\beta(E_k - \mu)/2} \end{aligned}$$

Bosoner: Beräkna först partitionsfunktionen Z genom att summera geometriska serien. Inför parametern $a = \beta\mu$:

$$Z = \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\beta(E_k - \mu)n_k} = \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{(-\beta E_k + a)n_k} = \sum_{n_k=0}^{\infty} (e^{-\beta E_k + a})^{n_k} = \frac{1}{1 - e^{-\beta E_k + a}}$$

Beräkna $\langle n_k^2 \rangle$ genom att derivera map a :

$$\langle n_k^2 \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n_k=0}^{\infty} n_k^2 e^{-\beta(E_k - \mu)n_k} = \frac{1}{Z} \sum_{n_k=0}^{\infty} n_k^2 e^{(-\beta E_k + a)n_k} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial a^2}$$

Beräkna derivatorna:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{1 - e^{-\beta E_k + a}} = \frac{e^{-\beta E_k + a}}{(1 - e^{-\beta E_k + a})^2} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} &= \frac{e^{-\beta E_k + a}}{(1 - e^{-\beta E_k + a})^2} + 2 \frac{(e^{-\beta E_k + a})^2}{(1 - e^{-\beta E_k + a})^3} \end{aligned}$$

Detta ger

$$\langle n_k^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} = (1 - e^{-\beta E_k + a}) \left(\frac{e^{-\beta E_k + a}}{(1 - e^{-\beta E_k + a})^2} + 2 \frac{(e^{-\beta E_k + a})^2}{(1 - e^{-\beta E_k + a})^3} \right)$$

$$= \frac{e^{-\beta E_k + a}}{1 - e^{-\beta E_k + a}} + 2 \left(\frac{e^{-\beta E_k + a}}{1 - e^{-\beta E_k + a}} \right)^2 = \langle n_k \rangle + 2\langle n_k \rangle^2$$

Slutligen fås

$$\begin{aligned} \frac{\delta n_k}{\langle n_k \rangle} &= \sqrt{\frac{\langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2}{\langle n_k \rangle^2}} = \sqrt{\frac{\langle n_k \rangle + 2\langle n_k \rangle^2 - \langle n_k \rangle^2}{\langle n_k \rangle^2}} = \sqrt{\frac{\langle n_k \rangle + \langle n_k \rangle^2}{\langle n_k \rangle^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\langle n_k \rangle} + 1} = \sqrt{e^{\beta(E_k - \mu)}} = e^{\beta(E_k - \mu)/2} \end{aligned}$$

SVAR:

$$\frac{\delta n_k}{\langle n_k \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\langle n_k \rangle}} \pm 1 = e^{\beta(E_k - \mu)/2}$$

där + är för bosoner och - för fermioner.