



KTH Teknikvetenskap

**SF1672 Linjär algebra**  
**Tentamen med lösningsförslag**  
**torsdag, 12 januari 2023, 08:00–13:00**

1. Tre plan i rummet ges av

$$H_1: x + 3y + z = 1; \quad H_2: 2x + y = 2; \quad H_3: 3x - y - z = 1.$$

- (1) Bestäm en parameterform för planet  $H_1$ . (1 p)
- (2) Bestäm en parameterform för den linje som ges av skärningen av  $H_2$  med  $H_3$ . (1 p)
- (3) Avgör om de tre planen skär varandra i en punkt. (2 p)

**Lösningsförslag.**

- (1) Att bestämma en parameterform innebär dels att bestämma två linjärt oberoende riktningsvektorer och dels att bestämma en godtycklig baspunkt på planet. Båda svaren är långt ifrån entydiga, så det finns många korrekta lösningar.

Riktningsvektorerna ges av lösningar till den homogena ekvationen  $x + 3y + z = 0$ , till exempel

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

En basvektor ges av en partikulär lösning av ekvationen, till exempel

$$P_0 = (1, 0, 0).$$

Därmed ges en parameterform av

$$H_1: P = P_0 + \lambda \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

- (2) Sätter man in ekvationen för  $H_2$  i ekvationen för  $H_3$ , så får man

$$1 = 3x - y - z = 3x - (2 - 2x) - z = 5x - 2 - z$$

eller

$$z = 5x - 3; \quad y = 2 - 2x.$$

Om vi väljer  $\lambda = x$  som fri variabel så får vi parameterformen

$$H_1 \cap H_2: P = (0, 2, -3) + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- (3) Frågan är ekvivalent med att linjen från del (2) skär  $H_3$  i en punkt. Vi sätter in den funna parameterformen i ekvationen för  $H_3$ :

$$1 = 3(1 + \lambda) - (\lambda(-2)) - (\lambda(5)) = 3 + 3\lambda + 2\lambda - 5\lambda = 3,$$

vilket är ett motsägelser. Alltså finns det ingen skärningspunkt.

2. Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

- (1) Bestäm alla egenvärden till  $A$ . (1 p)  
 (2) Bestäm en egenvektor till varje funnet egenvärde. (2 p)  
 (3) Bestäm en matris  $B$  sådan att  $B^{-1}AB$  är en diagonalmatris. (1 p)

### Lösningsförslag.

- (1) Vi beräknar först det karakteristiska polynomet:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -8 & 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) - 32 + 16(1+\lambda) + 16(1-\lambda) \\ = (\lambda^2 - 1)(3 - \lambda).$$

Nollställena, d.v.s. egenvärdena till  $A$ , är  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = +1$ ,  $\lambda_3 = 3$ .

- (2) Vi sätter in ett egenvärde i taget i  $A - \lambda I_3$  och beräknar en vektor i kärnan.

(a)  $A - (-1)I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ . En egenvektor ges av  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

(b)  $A - (+1)I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -8 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ . En egenvektor ges av  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

(c)  $A - 3I_3 = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ . En egenvektor ges av  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

- (3) Matrisen  $B$  har egenvektorerna som kolonner, d.v.s.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Matrisen till den linjära avbildningen  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  med avseende på basen

$$\mathcal{B} = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

är

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

- (1) Beräkna standardmatrisen till  $f$ . (3 p)  
 (2) Beräkna matrisen  $[f]_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}$  till  $f$  med avseende på basen

$$\mathcal{C} = \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

OBS: Jämför baserna noggrant så att du kan slippa beräkningar.

(1 p)

### Lösningsförslag.

- (1) Basbytesmatrisen från basen  $\mathcal{B}$  till standardbasen ges av

$$B = M_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Den omvända basbytesmatrisen ges av inversen:

$$M_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} = B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Därmed ges standardmatrisen som

$$\begin{aligned}[f]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} &= M_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}M_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

- (2) Basen  $\mathcal{C}$  är samma bas som  $\mathcal{B}$ , fast i omvänd ordning. Basbytet mellan  $\mathcal{B}$  och  $\mathcal{C}$  ges därför (i båda riktningar) av matrisen

$$C = M_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = M_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$[f]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = C[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

den matrisen som fås av  $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$  genom att byta både raderna och kolonnerna.

#### 4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (1) Bestäm en ortonormalbas till kolonnrummet  $\text{col}(A)$  av  $A$ . (2 p)  
 (2) Bestäm den ortogonala projektionen av  $\mathbf{b}$  på kolonnrummet av  $A$ . (2 p)

#### Lösningsförslag.

- (1) Vi använder Gram-Schmidts ortonormaliseringsmetod på  $A$ :s kolonner. Vektorn  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  har  
 längd  $\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$  och därmed

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi projicerar  $A$ :s andra kolonn på  $\mathbf{u}_1^\perp$ :

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

och normerar igen:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi noterar att  $A$ :s tredje kolonn är faktiskt lika med  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ . Rangén av  $A$  är alltså 2 och  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  utgör en ON-bas till  $\text{col}(A)$ .

(2) Vi använder den ortogonala projektionsformeln:

$$\text{proj}_{\text{col}(A)}(\mathbf{b}) = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{b})\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{b})\mathbf{u}_2 = \frac{1}{9} \left( 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

5. På vektorrummet  $\mathbf{P}_n$  av alla polynom av grad  $\leq n$  definieras en avbildning

$$f: \mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{P}_n$$

genom  $f(p)(x) = x^n p(\frac{1}{x})$ .

(1) Visa att  $f$  är en linjär avbildning. (1 p)

(2) Bestäm avbildningsmatrisen  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$  av  $f$  med avseende på basen  $\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^n\}$ . (1 p)

(3) Bestäm  $\det(f) = \det([f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}})$ . (2 p)

### Lösningsförslag.

(1) Vi har att  $f(p+q)(x) = x^n(p+q)(\frac{1}{x}) = x^n p(\frac{1}{x}) + x^n q(\frac{1}{x}) = (f(p) + f(q))(x)$  och  $f(\lambda p)(x) = x^n \lambda p(\frac{1}{x}) = \lambda f(p)(x)$ .

(2) Om  $p_i(x) = x^i$  så har vi att  $f(p_i)(x) = x^n (\frac{1}{x})^i = x^{n-i}$ . Avbildningsmatrisen ges därför av

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \ddots & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(3) Matrisen  $f$  kan fås av identitetsmatrisen genom ett antal radbyten: rad 1 byts mot rad  $n$ , rad 2 mot rad  $n-1$ , osv. Låt  $d_n = \det(f_n)$ , där  $f_n = f: \mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{P}_n$ . Om vi byter första och sista raden så får vi matrisen

$$\left[ \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & 0 \\ 0 & & [f_{n-2}] & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right]$$

och får därför den rekursiva formeln

$$d_n = -d_{n-2}.$$

Tillsammans med  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = -1$  får vi alltså:

$$d_n = \begin{cases} 1; & n = 4k \text{ eller } n = 4k + 3 \\ -1; & n = 4k + 1 \text{ eller } n = 4k + 2 \end{cases}.$$

6. Tre fiskare gör en tävling där var och ens uppdrag är att varje dag fånga lika många fiskar som de andra två fångade tillsammans dagen innan. Den yngsta och minst erfarna fiskaren börjar på dag 0 med en fisk, de andra med noll fiskar.

Bestäm hur många fiskar den yngsta fiskaren måste fånga på dag  $n$ , för alla  $n \geq 0$ . (6 p)

**Lösningsförslag.** Om  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  är antalet fiskar som de tre fiskarna måste fiska på dag  $n$  (där  $a_n$  motsvarar den yngsta fiskaren), så har vi rekursionsformeln

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_n + c_n; & a_0 &= 1 \\ b_{n+1} &= a_n + c_n; & b_0 &= 0 \\ c_{n+1} &= b_n + c_n; & c_0 &= 0. \end{aligned}$$

Med hjälp av matrisen  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  har vi alltså

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n; \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eller

$$\mathbf{x}_n = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

där  $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$ .

För att beräkna matrispotensen diagonaliserar vi  $A$ . Egenvärdena ges av nollställena av det karakteristiska polynomet men kan även avläsas genom inspektion:  $\lambda = -1$  är ett dubbelt egenvärde med egenvektorer  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  och  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , och det andra egenvärdet är  $\lambda = 2$

med egenvektor  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Om vi sätter  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  så får vi alltså diagonaliseringen

$$A = B \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} B^{-1}.$$

Eftersom vi bara behöver  $B^{-1}\mathbf{x}_0 = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  så slipper vi invertera  $B$  och löser istället  $By =$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ med lösning } \mathbf{y} = B^{-1}\mathbf{x}_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi slutför beräkningen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \frac{1}{3} B \begin{bmatrix} (-1)^n & & \\ & (-1)^n & \\ & & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(-1)^n \\ (-1)^n \\ 2^n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(-1)^n + 2^n \\ -2(-1)^n + (-1)^n + 2^n \\ -(-1)^n + 2^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

och får därmed svaret

$$a_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}.$$

**7.** Låt  $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$  vara två kvadratiska matriser som uppfyller  $AB = BA$ . Antag att  $A$  har  $n$  stycken olika egenvärden.

(1) Visa att varje egenvektor till  $A$  är också egenvektor till  $B$ .

**(3 p)**

- (2) Visa att  $A$  och  $B$  är *simultant diagonaliserbar*, d.v.s. att det finns en matris  $P$  sådan att  $P^{-1}AP$  och  $P^{-1}BP$  är diagonalmatriser. **(1 p)**
- (3) Ge ett motexempel till (b) där  $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$  uppfyller  $AB = BA$ ,  $A$  är diagonaliserbar, men där  $A$  har multipla egenvärden. **(2 p)**

### Lösningsförslag.

- (1) Låt  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Då gäller

$$A(B\mathbf{v}) = BA\mathbf{v} = B(\lambda\mathbf{v}) = \lambda B\mathbf{v}.$$

Detta innebär att  $B\mathbf{v}$  också är egenvektor av  $A$  till egenvärdet  $\lambda$ . Men eftersom  $A$  har  $n$  stycken olika egenvärden så är alla  $A$ :s egenrum endimensionella, d.v.s.  $\mathbf{v}$  och  $B\mathbf{v}$  måste ligga i samma endimensionella egenrum till  $\lambda$ . Alltså är  $B\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$  för något  $\mu \in \mathbf{R}$ .

- (2) Låt matrisen  $P$  bestå av en bas av egenvektorer till  $A$ . Då har vi att  $P^{-1}AP$  är en diagonalmatris. Men eftersom  $P$ :s kolonner också är egenvektorer till  $B$ , enligt (1), så är även  $P^{-1}BP$  en diagonalmatris.
- (3) Ett enkelt motexempel ges av  $A = I_n$ ,  $B$  en matris med ett enda nollskilt element i position  $(i, j)$  för  $i \neq j$ .  $B$  är inte diagonaliserbar (det enda egenvärdet är 0 och matrisen är inte nollmatrisen), men  $AB = B = BA$  och  $A$  är diagonal.

8. Låt  $S \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$  vara en symmetrisk matris. På vektorrummet  $V = \mathbf{R}^{2 \times 2}$  ges en funktion  $Q: V \rightarrow \mathbf{R}$  av

$$Q(A) = \text{tr}(A^T S A).$$

(Här betecknar  $\text{tr} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  spåret  $a + d$  av matrisen.)

Kom ihåg att en kvadratisk form på ett vektorrum  $V$  är per definition en funktion  $Q: V \rightarrow \mathbf{R}$  sådan att  $Q(\lambda x) = \lambda^2 x$  och sådan att funktionen  $\langle x, y \rangle =_{\text{def}} Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$  är linjär i  $x$  och i  $y$ .

- (1) Visa att  $Q$  är en kvadratisk form på  $V$ . **(2 p)**
- (2) Visa att  $Q$  är positivt (semi-)definit, negativt (semi-)definit respektive indefinit precis om den kvadratiske formen  $x \mapsto x^T S x$  på  $\mathbf{R}^2$  är det. **(4 p)**

### Lösningsförslag.

- (1) Vi måste bevisa att produkten  $\langle A, B \rangle = Q(A + B) - Q(A) - Q(B)$  är linjär i både  $A$  och  $B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ . Vi har:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}((A + B)^T S (A + B)) - \text{tr}(A^T S A) - \text{tr}(B^T S B).$$

Eftersom uppenbarligen  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$  så förenklas detta till

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T S B) + \text{tr}(B^T S A).$$

Från denna formel ser man att  $\langle A, B \rangle$  är bilinjär eftersom både matrismultiplikation och  $\text{tr}$  är linjära.

Dessutom har vi att  $Q(\lambda A) = \text{tr}((\lambda A)^T S (\lambda A)) = \text{tr}(\lambda^2 A^T S A) = \lambda^2 Q(A)$ .

- (2) Eftersom  $S$  är symmetrisk så kan vi skriva  $S = U^T D U$  för en diagonalmatris  $S$  och en ortogonal matris  $U$ . Därmed har vi

$$Q(A) = \text{tr}(A^T S A) = \text{tr}(A^T U^T D U A) = \text{tr}((U A)^T D (U A)).$$

Vi ser att den kvadratiske formen  $Q = Q_S$  som tillhör  $S$  har samma karaktär som  $Q_D$ , den kvadratiske formen som tillhör diagonalmatrisen  $D$ . Med karaktär menas här positivt/negativt (semi-)definit respektive indefinit. Vi kan alltså anta att  $S = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{bmatrix}$  är

diagonal. Vi beräknar för  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ :

$$\begin{aligned} Q(A) &= \operatorname{tr} \left( \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \operatorname{tr} \left( \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \mu c & \mu d \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda a^2 + \lambda b^2 + \mu c^2 + \mu d^2 = \lambda(a^2 + b^2) + \mu(c^2 + d^2). \end{aligned}$$

Detta tal är:

- positivt för alla  $A \neq 0$  omm  $\lambda, \mu > 0$  omm  $S$  är positivt definit;
- negativt för alla  $A \neq 0$  omm  $\lambda, \mu < 0$  omm  $S$  är negativt definit;
- positivt för vissa  $A$  och negativt för andra omm  $\lambda\mu < 0$  omm  $S$  är indefinit;
- ickepositivt för alla  $A$  omm  $\lambda, \mu \geq 0$ ;
- ickepositivt för alla  $A$  omm  $\lambda, \mu \leq 0$ .

Därmed har  $Q$  och  $S$  samma karaktär.