

SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Lösningsförslag till tentamen
Måndag den 18 december 2023

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem för $y = y(x)$ och bestäm lösningarnas existensintervall.

(a) $y' = \frac{x}{y-x^2y}$, $y(0) = -2$, (b) $(x+1)y' - xy = x+x^2$, $y(0) = 0$.

(4 p)

Lösningsförslag. (a) Vi skriver ekvationen som

$$y' = \frac{x}{y-x^2y} = \frac{x}{1-x^2} \cdot \frac{1}{y}$$

och ser att det är en separabel ekvation. Vi skriver om den till

$$yy' = \frac{x}{1-x^2}$$

Vi integrerar med avseende på x med substitutionen $y = y(x)$ i vänsterledet och får

$$\frac{1}{2}y^2 = \int y dy = \int yy' dx = \int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln|1-x^2| + C,$$

eller

$$y = \pm \sqrt{-\ln|1-x^2| + 2C}.$$

Initialvillkoret $y(0) = -2$ ger att

$$-2 = \pm \sqrt{-\ln|1-0| + 2C} = \pm \sqrt{2C}$$

så $C = 2$ och vi ska välja lösningen med minustecken. Lösningen ges alltså av

$$y = -\sqrt{-\ln|1-x^2| + 4}.$$

Lösningen är definierad så länge $1-x^2 > 0$ och $-\ln|1-x^2| + 4 > 0$. Det första villkoret är samma som $-1 < x < 1$. Eftersom $1-x^2 < 1$ så är $-\ln|1-x^2| > 0$ och det andra villkoret är också uppfyllt. Wxistensintervallet för lösningen är alltså intervallet $-1 < x < 1$.

(b) Detta är en första ordningens linjär ekvation som kan lösas genom att multiplicera med en integrerande faktor. Vi skriver ekvationen som

$$y' - \frac{x}{x+1}y = \frac{x+x^2}{1+x} = x,$$

så att vi ser att en integrerande faktor ges av

$$e^{\int -\frac{x}{x+1} dx} = e^{\int (-1 + \frac{1}{x+1}) dx} = e^{-x + \ln(x+1)} = (x+1)e^{-x}.$$

När vi multiplicerar med den integrerande faktorn får vi ekvationen

$$(x+1)e^{-x}y' - xe^{-x}y = x(x+1)e^{-x} = x^2e^{-x} + xe^{-x},$$

där vänsterledet är derivatan av en produkt,

$$((x+1)e^{-x}y)' = x^2e^{-x} + xe^{-x}.$$

Vi integrerar detta och får

$$\begin{aligned}(x+1)e^{-x}y &= \int (x^2e^{-x} + xe^{-x}) dx = \{\text{Formelblad (55),(53)}\} \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} - (x+1)e^{-x} + C = -(x^2 + 3x + 3)e^{-x} + C.\end{aligned}$$

Eftersom $y(0) = 0$ har vi

$$0 = -3 + C$$

så $C = 3$ och lösningen till initialvärdesproblemet är

$$y = -\frac{x^2 + 3x + 3}{x+1} + \frac{3e^x}{x+1}.$$

Lösningen är definierad så länge $x+1 \neq 0$, eller $x \neq -1$. Existensintervallet för lösningen med initialvillkor i $x = 0$ är alltså intervallet $-1 < x < \infty$.

□

2. Ekvationen

$$xy + (2x^2 + 3y^2 - 20) \frac{dy}{dx} = 0$$

för $y = y(x)$ är inte exakt, men kan göras exakt genom att multiplicera med en integrerande faktor $\mu = \mu(y)$ som bara beror av y . Lös ekvationen. **(4 p)**

Lösningsförslag. Låt $M(x, y) = xy$ och $N(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 20$ så att ekvationen ges av

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Villkoret för att denna ekvation ska vara exakt är att

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

vilket inte är uppfyllt. Om vi multiplicerar med $\mu(x)$ får vi ekvationen

$$\mu(y)M(x, y) + \mu(y)N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Villkoret för att denna nya ekvation ska vara exakt är

$$\frac{\partial(\mu(y)M(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(y)N(x, y))}{\partial x}$$

eller

$$\mu'(y)M(x, y) + \mu(y) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \mu(y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

eller

$$\mu'(y)xy + \mu(y)x = \mu(y)4x$$

eller

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{3}{y}$$

Vilket har den allmänna lösningen

$$\mu(y) = Cy^3.$$

Då vi bara behöver en integrerande faktor väljer vi $C = 1$ och multiplicerar vår differentialekvation med $\mu(x) = y^3$, vilket ger ekvationen

$$xy^4 + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3) \frac{dy}{dx} = 0$$

som nu alltså är exakt. En potentialfunktion $\psi(x, y)$ till denna ekvation ska uppfylla

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = xy^4, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3.$$

Vi integrerar den första av dessa ekvationer och får

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + h(y)$$

där $h(y)$ är en funktion av y som återstår att bestämma. Detta insatt i andra ekvationen ger

$$2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3 = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x^2y^3 + h'(y)$$

vilket är uppfyllt om $h'(y) = 3y^5 - 20y^3$, eller om $h(y) = \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 + D$. Vi väljer $D = 0$ och har alltså hittat en potentialfunktion

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4.$$

Lösningarna till differentialekvationen ges på implicit form av $\psi(x,y) = A$ där A är en konstant.

□

3. Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ har egenvärden $r_1 = 0$ och $r_2 = -5$. Bestäm den allmänna lösningen till det homogena systemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. Motivera varför du har hittat den allmänna lösningen till systemet. Bestäm därefter den allmänna lösningen till det inhomogena systemet

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} -2+t^{-1} \\ 1+2t^{-1} \end{pmatrix}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. En egenvektor till $r_1 = 0$ är $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och en egenvektor till $r_2 = -5$ är $\xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Två lösningar till det homogena systemet är alltså

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{0t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}.$$

Den allmänna lösningen till det homogena systemet ges av

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{x}_1(t) + C_2 \mathbf{x}_2(t)$$

där C_1, C_2 är konstanter. Detta är den allmänna lösningen då $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ är linjärt oberoende, vilket man kan kontrollera genom att beräkna deras Wronskian.

Från den allmänna lösningen får vi att en fundamentalmatris till den homogena ekvationen är

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-5t} \\ 2 & e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Den uppfyller $\Psi'(t) = \mathbf{A}\Psi(t)$. För att lösa den icke-homogena ekvationen använder vi variation av parametrar och gör ansatsen $\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{u}(t)$. Insatt i ekvationen ger denna ansats

$$\Psi'(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} -2+t^{-1} \\ 1+2t^{-1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} -2+t^{-1} \\ 1+2t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Detta förenklas till

$$\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \begin{pmatrix} -2+t^{-1} \\ 1+2t^{-1} \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(t) &= \Psi^{-1}(t) \begin{pmatrix} -2+t^{-1} \\ 1+2t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-5t} \\ 2 & e^{-5t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2+t^{-1} \\ 1+2t^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2e^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2+t^{-1} \\ 1+2t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-1} \\ e^{5t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Detta integrerar vi till

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ \frac{1}{5}e^{5t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

så

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Psi(t)\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-5t} \\ 2 & e^{-5t} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \ln t \\ \frac{1}{5}e^{5t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \ln t - \frac{2}{5} \\ 2\ln t + \frac{1}{5} \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}, \end{aligned}$$

vilket alltså är den allmänna lösningen till det inhomogena systemet.

□

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Visa att ekvationen

$$2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$$

för $y = y(x)$ har en reguljär singulär punkt vid $x = 0$. Bestäm två linjärt oberoende serielösningar av Frobeniustyp vid $x = 0$ till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i dessa serielösningar, samt beräkna minst tre noll-skiljda termer i vardera serie. För vilka x konvergerar dessa serier? **(4 p)**

Lösningsförslag. Eftersom koefficienten $2x^2$ framför högsta derivatan y'' är noll vid $x = 0$ är punkten $x = 0$ en singulär punkt. För att undersöka om det är en reguljär singulär punkt skriver vi om ekvationen som

$$2x^2y'' + x(3)y' + (2x^2 - 1)y = 0.$$

Då koefficienterna i parenteser här,

$$3 \quad \text{och} \quad 2x^2 - 1,$$

båda är reguljära vid $x = 0$ är det en reguljär singulär punkt.

För att hitta serielösningar till ekvationen gör vi ansatsen

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n},$$

där r är ett reellt tal, och vi antar att den första koefficienten $a_0 \neq 0$. Då är

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n-1} \quad \text{och} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-2}.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y \\ &= 2x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-2} \right) + 3x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n-1} \right) + (2x^2 - 1) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n(r+n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{r+n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2a_n(r+n)(r+n-1) + 3a_n(r+n) - a_n \right) x^{r+n} + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-2} x^{r+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((r+n)(2r+2n+1) - 1 \right) a_n x^{r+n} + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-2} x^{r+n} \\ &= \left(r(2r+1) - 1 \right) a_0 x^r + \left((r+1)(2r+3) - 1 \right) a_1 x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left((r+n)(2r+2n+1) - 1 \right) a_n + 2a_{n-2} \right] x^{r+n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Eftersom $a_0 \neq 0$ måste r uppfylla indicialekvationen

$$0 = r(2r+1) - 1 = 2r^2 + r - 1.$$

Vi får två lösningar

$$r_1 = -1, \quad r_2 = \frac{1}{2}.$$

Koefficienterna a_n bestäms sedan av $((r+1)(2r+3)-1)a_1 = 0$ och

$$((r+n)(2r+2n+1)-1)a_n + 2a_{n-2} = 0,$$

eller

$$a_n = -\frac{2}{(r+n)(2r+2n+1)-1}a_{n-2}$$

för $n \geq 2$.

För $r_1 = -1$ får vi att $a_1 = 0$ och

$$a_n = -\frac{2}{(n-1)(2n-1)-1}a_{n-2}$$

för $n \geq 2$. Eftersom $a_1 = 0$ så är $a_n = 0$ för alla udda n . Med $a_0 = 1$ är de första koefficienterna med jämna n lika med

$$a_0 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_4 = \frac{1}{10}, \quad \dots$$

och vi har en lösning $y_1(x)$ med

$$y_1(x) = x^{-1} \left(1 - x^2 + \frac{1}{10}x^4 + O(x^6) \right).$$

För $r_2 = 1/2$ får vi att $a_1 = 0$ och

$$a_n = -\frac{2}{(2n+1)(n+1)-1}a_{n-2}$$

för $n \geq 2$. Eftersom $a_1 = 0$ så är $a_n = 0$ för alla udda n . Med $a_0 = 1$ är de första koefficienterna med jämna n lika med

$$a_0 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{7}, \quad a_4 = \frac{1}{154}, \quad \dots$$

och vi har en lösning $y_2(x)$ med

$$y_2(x) = x^{-1} \left(1 - \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{154}x^4 + O(x^6) \right).$$

För att undersöka konvergensen för dessa serier använder vi kvottestet. Vi kan göra detta samtidigt för fallen $r_1 = -1$ och $r_2 = 1/2$. Eftersom $a_n = 0$ för udda n i båda fallen har vi

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{r+2n}.$$

För kvottestet beräknar vi gränsvärdet av beloppet av kvoten av en term med termen innan,

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n} x^{r+2n}}{a_{2n-2} x^{r+2n-2}} \right| = |x^2| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{2}{(r+2n)(2r+4n+1)-1} \right| = 0.$$

Detta gäller för alla x sådana att termerna i serierna är meningsfulla. Eftersom $Q < 1$ så konvergerar alltså serierna för alla sådana x . För $r_1 = -1$ är första termen endast definierad för $x \neq 0$, så serien för $y_1(x)$ konvergerar för alla $x \neq 0$. För $r_2 = 1/2$ är uttrycken $x^{1/2+2n}$ meningsfulla bara för $x \geq 0$, så serien för $y_2(x)$ konvergerar för alla $x \geq 0$.

□

5. Utlagsvinkeln $\theta(t)$ för en svängande pendel uppfyller ekvationen $\theta''(t) + \sin \theta(t) = 0$.

Med $x(t) = \theta(t)$ och $y(t) = \theta'(t)$ ger detta det autonoma systemet $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\sin x(t) \end{cases}$.

Punkten $(0,0)$ är en kritisk punkt för detta system.

(a) Vad säger metoden med linjärisering om stabiliteten för den kritiska punkten?

(b) Vad säger Lyapunovs metod om stabiliteten för den kritiska punkten? (Ledning: det finns en Lyapunovfunktion som är uppbyggd av $1 - \cos x$ och y^2 .)

(4 p)

Lösningsförslag. (a) För detta system ges linjäriseringen i origo av det linjära systemet

$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$. Typen för det linjära systemet är ett center, vilket inte ger någon information om stabilitet för det ursprungliga systemet.

(b) Enligt ledningen försöker vi hitta en Lyapunovfunktion på formen

$$V(x, y) = A(1 - \cos x) + By^2.$$

Eftersom $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ så har vi för små x att $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) \geq 0$ med likhet endast om $x = 0$. Om $A, B > 0$ så är alltså $V(x, y)$ alltid en positivt definit funktion i en omgivning av origo.

Vi ska nu välja A, B så att $V(x, y)$ inte växer längs lösningskurvor till systemet som startar nära $(0, 0)$. För en sådan lösningskurva beräknar vi

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (A \sin x)y + (2By)(-\sin x) = (A - 2B)y \sin x.$$

Om vi väljer $A = 1$ och $B = 1/2$ så är $\dot{V} = 0$ och alltså en negativt semidefinit funktion. Enligt Lyapunovs stabilitetssats är origo en stabil kritisk punkt.

□

6. Denna uppgift gäller existens och entydighet för lösningar $y = y(t)$ till initialvärdesproblemet

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0,$$

där $f(t, y)$ är en funktion definierad på en rektangel R i ty -planet som innehåller punkten $(0, 0)$.

(a) Formulera Picards sats som garanterar att initialvärdesproblemet har en unik lösning. Var noggrann när du anger villkoren i satsen.

(b) I beviset av Picards sats definieras en följd av $y = \phi_n(t)$ av approximativa lösningar genom $\phi_0(t) = 0$ och $\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, \phi_n(s)) ds$. En del av beviset visar att det finns ett $h > 0$ så att alla $\phi_n(t)$ är definierade för $|t| \leq h$. Med detta, bevisa att

$$|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| \leq \frac{MK^n h^{n+1}}{(n+1)!}$$

för alla $n = 0, 1, 2, \dots$, där M, K är konstanter sådana att $|f| < M$ och $|\partial f / \partial y| < K$ på R .

(4 p)

Lösningsförslag. (a) Se Boyce-DiPrima Theorem 2.8.1.

(b) Differentialkalkylens medelvärdessats tillämpad på $f(t, y)$ som funktion av y säger att

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y^*)(y_1 - y_2)$$

där y^* ligger mellan y_1 och y_2 . Eftersom funktionen $\partial f / \partial y$ är kontinuerlig på det kompakta definitionsområdet R så är den också begränsad, $|\partial f / \partial y| \leq K$, och vi drar slutsatsen att *Lipschitzvillkoret*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

gäller.

Eftersom $f(t, y)$ är kontinuerlig på rektangeln R så är den också begränsad. Låt M vara en konstant så att $|f| \leq M$ på R . För den första funktionen $\phi_1(t)$ har vi $\phi_1(t) = \int_0^t f(s, \phi_0(s)) ds = \int_0^t f(s, 0) ds$, så

$$|\phi_1(t)| = \left| \int_0^t f(s, 0) ds \right| \leq \int_0^{|t|} |f(s, 0)| ds \leq \int_0^{|t|} M ds = M|t|.$$

För ett induktionsbevis, antag nu att

$$|\phi_k(t) - \phi_{k-1}(t)| \leq \frac{MK^{k-1}|t|^k}{k!}$$

för något $k \geq 1$. Eftersom

$$\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t) = \int_0^t (f(s, \phi_k(s)) - f(s, \phi_{k-1}(s))) ds$$

så ger Lipschitzvillkoret och induktionsantagandet att

$$\begin{aligned} |\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)| &= \left| \int_0^t (f(s, \phi_k(s)) - f(s, \phi_{k-1}(s))) ds \right| \\ &\leq \int_0^{|t|} |f(s, \phi_k(s)) - f(s, \phi_{k-1}(s))| ds \\ &\leq \int_0^{|t|} K |\phi_k(s) - \phi_{k-1}(s)| ds \\ &\leq K \int_0^{|t|} \frac{MK^{k-1}|s|^k}{k!} ds = \frac{MK^k |t|^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Vi har alltså visat att

$$|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)| \leq \frac{MK^k |t|^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{MK^k h^{k+1}}{(k+1)!}$$

för alla $k = 0, 1, 2, \dots$, där $h > 0$ är sådant att alla $\phi_n(t)$ är definierade på intervallet $|t| \leq h$. $\square$