



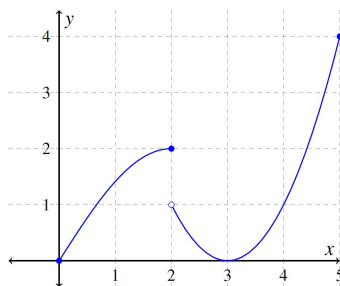
Lösningsförslag till tentamen
Tisdagen den 14 april 2020

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. (a) Ange definitionen av att en funktion $f(x)$ är kontinuerlig vid en punkt $x = a$.
(b) Bestäm för vilka reella tal a som funktionen $f(x) - g(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[0, 5]$, där

$$g(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & x \in [0, 2] \\ \frac{\ln(x-1)}{a(x-2)} & x \in (2, 5], \end{cases}$$

och $f(x)$ har grafen



och bevisa att den resulterande funktionen verkligen är kontinuerlig.

(4 p)

Lösningsförslag.

- (a) Låt $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion sådan att för varje punkterad omgivning O av a innehåller punkter från D_f (d.v.s. $D_f \cap O \neq \emptyset$), och $a \in D_f$. Vi säger att f är kontinuerlig vid $x = a$ om $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
(b) Observera att enligt grafen är $f(x)$ kontinuerlig på $[0, 2)$ och $(2, 5]$. Vi har också att att $\sin(\pi x)$ är kontinuerlig på $[0, 2)$ och $\ln(x-2)$ och $\frac{1}{a(x-2)}$ är kontinuerlig på $(2, 5]$ vilket ger oss att $g(x)$ är kontinuerlig på $[0, 2)$ och $(2, 5]$. Eftersom summan av två kontinuerliga funktioner är kontinuerlig har vi att $f(x) + g(x)$ är kontinuerlig på $[0, 5] \setminus \{2\}$. Nu måste vi kolla om det finns ett a sådant att summan är kontinuerlig vid 2.

Observera att

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) \\ &= 2 - \lim_{x \rightarrow 2^-} \sin(\pi x) = 2 \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-1)}{a(x-2)}. \end{aligned}$$

Vi använder variabelbytet $t = x - 2$ och ett standardgränsvärde för att säga

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-1)}{a(x-2)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{a},$$

vilket ger $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - g(x) = 1 - \frac{1}{a}$. Till sist har vi att $f(2) - g(2) = 2 - \sin(2\pi) = 2$. Om vi tar $a = -1$ har vi att

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - g(x) = f(2) - g(2) = 2.$$

Det vill säga att $f(x) - g(x)$ är också kontinuerlig vid $x = 2$ om $a = -1$ och då kontinuerlig på $[0, 5]$.

□

Svar. (b) $a = -1$

2. (a) Ange definitionen av att funktionen $f(x)$ är deriverbar i punkten $x = a$. Om $f(x)$ är deriverbar i $x = a$, ange definitionen av $f'(a)$.
 (b) Bestäm en funktion f vars derivata ges av

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x+h}}{1+(x+h)^2} - \frac{e^x}{1+x^2}}{h}.$$

- (c) Derivera funktionen $f : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, och visa utifrån definitionen att derivatan är korrekt.

(4 p)

Lösningsförslag.

- (a) Låt f vara en funktion definierad i en omgivning av a . Vi säger att f är deriverbar i punkten a om

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar. Värdet $f'(a)$ kallas derivatan av f i punkten a .

- (b) Vi kan se att om vi tar $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ då har vi enligt definitionen att

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x+h}}{1+(x+h)^2} - \frac{e^x}{1+x^2}}{h}.$$

- (c) Först observera att $f(x) = (x-2)^{-1/2}$, då använder derivationsreglarna för att säga

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^{-3/2}.$$

Nu använder vi definitionen för att säga att

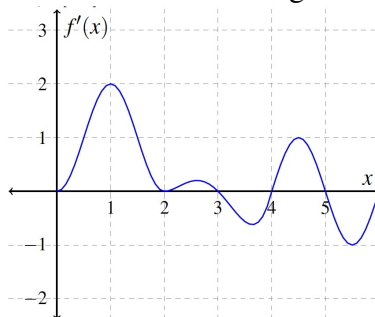
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h-2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x-2)(x+h-2)}} - \frac{\sqrt{x+h-2}}{\sqrt{(x-2)(x+h-2)}} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+h-2}}{\sqrt{(x-2)(x+h-2)}} \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+h-2}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+h-2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{x-2 - (x+h-2)}{\sqrt{(x-2)(x+h-2)}(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+h-2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \frac{-1}{\sqrt{(x-2)(x+h-2)}(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+h-2})} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-2})}} = -\frac{1}{2(x-2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Detta passar med derivatan som vi fick genom derivationsreglar.

□

Svar. (b) $f'(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^{-3/2}$

3. (a) Ange definitionen av att en funktion $f(x)$ har ett lokalt minimum vid $x = a$.
 (b) Låt $f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ vara en deriverbar funktion där grafen av $f'(x)$ ges av



Bestäm för vilka $x \in [0, 6]$ funktionen f har ett lokalt minimum. Kom ihåg att motivera ditt svar.

- (c) Låt $h: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktionen som ges av

$$h(x) = \begin{cases} |x-1| & x \in [0, 2) \\ \sin(\pi x) & x \in [2, 5]. \end{cases}$$

Bestäm för vilka $x \in [0, 5]$ funktionen h har ett lokalt minimum. Kom ihåg att motivera ditt svar.

(4 p)

Lösningsförslag.

- (a) En funktion sägs ha ett lokalt minimum i punkten $a \in D_f$ om det finns en omgivning I till a sådan att $f(x) \geq f(a)$ för varje $x \in I \cap D_f$.
 (b) Eftersom f är deriverbar och derivatan finns för varje punkt i $(0, 6)$ har vi en sats som säger att en lokal-extrempunkt i $(0, 6)$ måste också vara en stationärpunkt. Det vill säga att de enda möjliga punkter i $(0, 6)$ som kan vara ett lokalt minimum för funktionen är $x = 2, 3, 4, 5$. För att ha ett lokalt minimum måste vi ha att funktionen är avtagande innan punkten och växande efter punkten, vilket enligt en annan sats händer där $f' \leq 0$ och respektive $f' \geq 0$. Enligt grafen kan vi se att detta händer bara kring $x = 4$. Då har vi att $x = 4$ är den enda lokal minpunkt i $(0, 6)$.

Nu måste vi kolla på ändpunkterna. Vid 0 har vi att derivatan är positiv till högersidan vilket ger att funktionen är växande vilket ger att 0 är ett lokalt minimum. Vid 6 har vi att f' är negativ till vänstersidan av 6 och då är funktionen avtagande vilket ger att 6 är också ett lokalt minimum.

De lokala minimum är $x = 0, 4, 6$.

- (c) Observera att $h(x)$ är deriverbar på $(0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 5)$, och vi har

$$h'(x) = \begin{cases} -1 & x \in (0, 1) \\ 1 & x \in (1, 2) \\ \pi \cos(\pi x) & x \in (2, 5). \end{cases}$$

Då har vi att de enda stationär punkter i $(0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 5)$ är där $h'(x) = 0$ vilket händer bara för $x \in (2, 5)$. På detta interval har vi att $h(x) = \sin(\pi x)$ och $\sin(x)$ har maxpunkter vid $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ och minpunkter vid $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. Detta ger oss att $\sin(\pi x)$ har minpunkter vid $\frac{3}{2} + 2k$ och den enda sådana punkten i $(2, 5)$ är $\frac{7}{2}$.

Nu måste vi kolla på punkterna där $h(x)$ är ej deriverbar, d.v.s. $x = 0, 1, 2, 5$. Vid 0 har vi att $h(x)$ är kontinuerlig och $h'(x)$ är negativ vilket ger att $x = 0$ kan inte vara en minpunkt. Vid $x = 1$ har vi att $h(x)$ är kontinuerlig och det är avtagande innan och växande efter vilket ger att $x = 1$ är en lokal minpunkt. Vid $x = 2$ har vi att funktionen

är ej kontinuerlig.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 1, \quad h(2) = \sin(2\pi) = 0 = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$$

dessutom har vi att h är växande till höger vilket ger att 2 är en lokal minpunkt. Till sist måste vi kolla vid $x = 5$. Eftersom $\sin(x)$ är avtagande vid 5π har vi att $h(x)$ är avtagande vid 5 vilket ger att 5 är ett lokalt minimum.

De lokala minpunkterna är $x = 1, 2, 7/2, 5$.

□

Svar. (b) 0, 4, 6

(c) 1, 2, 7/2, 5

4. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 10x - 1$.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi börjar med att hitta en partikulärlösning till differentialekvationen. Vi gissa att lösningen är av formen $y_p = Ax + B$. Då har vi att $y'_p = A$ och $y''_p = 0$. Detta ger oss att

$$y'' + 2y' + 5y = 2A + 5(Ax + B) = 10x - 1.$$

vilket ger $A = 2$ och $B = -1$ eller $y_p = 2x - 1$.

Nu letar vi efter den allmänna lösningen till den homogena differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 0$. Vi kolla på den karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r + 5 = 0$ vilket har lösningar

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Enligt en sats har vi att den allmänna lösningen till den homogena differentialekvationen är

$$y_h = e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)).$$

Till sist har vi att den allmänna lösningen till den differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 10x - 1$ är

$$y = y_p + y_h = 2x - 1 + e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)).$$

□

Svar.

$$y = y_p + y_h = 2x - 1 + e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)).$$

5. Beräkna arean mellan kurvorna $f(x) = xe^x$ och $g(x) = -\frac{1+x+x^2}{(1+x^2)x}$ för x i intervallet $[1, 3]$.
(Förvänta dig inte att det slutliga svaret är vackert.) **(4 p)**

Lösningförslag. Observera att $f(x)$ är positiv och $g(x)$ är negativ vilket ger omedelbart att $f(x) \geq g(x)$ för all $x \in [1, 3]$. Då har vi att arean mellan de två kurvorna är

$$\int_1^3 f(x) - g(x) dx = \int_1^3 xe^x dx + \int_1^3 \frac{1+x+x^2}{(1+x^2)x} dx$$

För den första använder vi partialintegration:

$$\begin{aligned} \int_1^3 xe^x dx &= [xe^x]_1^3 - \int_1^3 1 \cdot e^x dx \\ &= 3e^3 - e - [e^x]_1^3 = 3e^3 - e - (e^3 - e) = 2e^3 \end{aligned}$$

För den andra integralen använder vi partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{(1+x^2)x} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{x}$$

Då måste vi ha att

$$(Ax+B)x + C(1+x^2) = 1+x+x^2 \implies \begin{cases} A+C=1 & x^2 \text{ terms} \\ B=1 & x \text{ terms} \\ C=1 & \text{constant terms} \end{cases}$$

Detta ger oss att $A=0, B=1, C=1$.

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{1+x+x^2}{(1+x^2)x} dx &= \int_1^3 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_1^3 \frac{1}{x} dx \\ &= [\arctan x]_1^3 + [\ln |x|]_1^3 \\ &= \arctan 3 - \arctan 1 + \ln 3 - \ln 1 = \arctan 3 - \frac{\pi}{2} + \ln 3 \end{aligned}$$

Då har vi att arean är $2e^3 + \arctan 3 + \ln 3 - \frac{\pi}{2}$. □

Svar. $2e^3 + \arctan 3 + \ln 3 - \frac{\pi}{2}$

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. För varje del, ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som har de angivna egenskaperna:
- (a) f är kontinuerlig men inte deriverbar vid varken $x = 1$ eller $x = 5$.
 - (b) f är deriverbar och har en maxpunkt vid $x = -2$ och en minpunkt vid $x = 1$.
 - (c) f har en primitiv funktion F som är både avtagande på $(-\infty, \infty)$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = -10$.

(4 p)

Lösningsförslag.

- (a) Låt $f(x) = |x - 1| + |x - 5|$. Eftersom $|x|$ är kontinuerlig som en funktion följer det att $|x - 1|$, $|x - 5|$ och deras summa är också kontinuerlig. Observera nu att $|x|$ är ej deriverbar vid 0 eftersom

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = -1 \neq 1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - 0}{h}.$$

På samma sätt har vi att $|x - 1|$ är ej deriverbar vid 1 och $|x - 5|$ är ej deriverbar vid 5 vilket ger att $f(x)$ har de önskade egenskaper.

- (b) Vi kan börjar med att anta att funktionen har formen $f(x) = Cp(x)/q(x)$ där $p(x) = x + a$ och $q(x) = x^2 + bx + c$. Då har vi att

$$f'(x) = C \frac{x^2 + bx + c - (x + a)(2x + b)}{(x^2 + bx + c)^2}$$

Om vi väljer a, b , och c sådana att $x^2 + bx + c - (x + a)(2x + b) = \frac{1}{C}(x + 2)(x - 1) = \frac{1}{C}(x^2 + x - 2)$ och $x^2 + bx + c$ har ingen nollställe, skulle vi ha ett bra kandidat att testa.

$$x^2 + bx + c - (x + a)(2x + b) = -x^2 - 2ax + c - ab = -(x^2 + 2ax + ab - c).$$

Vi tar $a = 1/2, b = 0, c = 2$ och $C = -1$. Detta ger oss att

$$f(x) = -\frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + 2} \quad \text{and} \quad f'(x) = \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x^2 + 2)^2}.$$

Vi kan se att f är deriverbar på $\mathbb{R}$ med stationärpunkter vid -2 och 1 . Vi kan också se att f' är positiv för $x < -2$ och $x > 1$ och negativ där $-2 < x < 1$. Eftersom dessa är de enda stationär punkter och gränsvärdet då $x \rightarrow \infty$ är 0 måste de var det maximum och minimum av $f(x)$.

- (c) Vi börjar med att hitta en funktion $F(x)$ som är både avtagande och har $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = -10$, då kan vi ta derivatan för att hitta f . Låt $F(x) = e^{-x} - 10$, då är $F(x)$ avtagande och $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = -10$. Då har vi att $f(x) = F'(x) = -e^{-x}$ är ett exempel av en sådan funktion.

□

7. (a) Ange definitionen av att en talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot L då $n \rightarrow \infty$. Bevisa antingen att talföljden

$$a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{2n} & n \text{ udda} \\ \frac{e^n+1}{2e^n} & n \text{ jämnt} \end{cases}$$

konvergerar, eller att den divergerar.

- (b) Bevisa att om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en växande och uppåt begränsad talföljd så är den konvergent och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}.$$

(4 p)

Lösningsförslag.

- (a) En talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sags konvergera mot gränsvärdet L om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n - L| < \varepsilon$ för varje $n > N$.

Talföljden a_n konvergerar mot $1/2$ då $n \rightarrow \infty$. För att bevisa detta observera först att talföljden kan skrivas om som

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} & n \text{ udda} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^n} & n \text{ jämnt.} \end{cases}$$

Låt $\varepsilon > 0$. Vi har att

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} \frac{1}{2n} & n \text{ udda} \\ \frac{1}{2e^n} & n \text{ jämnt.} \end{cases}$$

Observerar att $\frac{1}{2e^n} \leq \frac{1}{2n}$ för varje $n \geq 1$, därför ska det räcka att hitta ett N sådant att $\frac{1}{2n} < \varepsilon$ för varje $n > N$. Ta $N = \frac{1}{2\varepsilon}$, vilket är alltid möjligt eftersom $\mathbb{N}$ är obegränsad. Då har vi att för varje $n > N$ att $n > 1/(2\varepsilon)$ vilket är ekvivalent med $\varepsilon > 1/(2n)$ och så

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2n} < \varepsilon.$$

- (b) Eftersom $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är uppåt begränsad har vi att den har ett supremum. Enligt egenskaper av supremum vet vi att för varje a_n det följer att $a_n \leq \sup\{a_k : k = 1, 2, \dots\}$. Vi vet också att för varje $\varepsilon > 0$ det finns ett N sådant att

$$\sup\{a_k : k = 1, 2, \dots\} - a_N = |\sup\{a_n : n = 1, 2, \dots\} - a_N| < \varepsilon.$$

Eftersom $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande har vi att för varje $n > N$ att

$$a_N \leq a_n \leq \sup\{a_k : k = 1, 2, \dots\}$$

vilket ger att

$$|\sup\{a_k : k = 1, 2, \dots\} - a_n| \leq |\sup\{a_k : k = 1, 2, \dots\} - a_N| < \varepsilon.$$

Då enligt definitionen har vi att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot $\sup\{a_k : k = 1, 2, \dots\}$ då $n \rightarrow \infty$.

□

8. Bevisa om den följande integralen konvergerar eller divergerar.

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2 |\sin x|^{1/2}} dx$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vi ska visa att integralen konvergerar. Vi börjar med att bevisa att

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{|\sin x|^{1/2}} dx \quad \text{konvergerar.}$$

Observera att integralen är generaliserad vid båda 0 och π så vi dela up den som

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\sin x|^{1/2}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{|\sin x|^{1/2}} dx$$

Vi använder en jämförelsesats för att se att båda integralerna konvergerar. Den första jämför vi med $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ vilken konvergerar.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{|\sin x|^{1/2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|^{1/2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \right)^{1/2} = 1.$$

Då har vi att $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\sin x|^{1/2}} dx$ konvergerar. För den andra integralen gör vi först variabel bytet $t = \pi - x$ vilket ger

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{|\sin x|^{1/2}} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{|\sin(\pi - t)|^{1/2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\sin t|^{1/2}} dt$$

när vi använder $\sin(\pi - t) = \sin t$. Enligt våra tidigare beräkningar få vi att denna integral konvergerar också.

Nu observerar att

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2 |\sin x|^{1/2}} dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{x^2 |\sin x|^{1/2}} dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{(k\pi)^2 |\sin x|^{1/2}} dx \end{aligned}$$

Här använde vi en jämförelse sats vilket säga att eftersom $\frac{1}{x^2 |\sin x|^{1/2}} \leq \frac{1}{(k\pi)^2 |\sin x|^{1/2}}$ för $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$ måste deras integraler uppfylla den samma olikheten. Nu observera att för varje k har vi att

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{|\sin x|^{1/2}} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{(k\pi)^2 |\sin x|^{1/2}} dx$$

eftersom $|\sin x|$ är periodisk med period π . Detta ger oss att

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2 |\sin x|^{1/2}} dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} \int_0^{\pi} \frac{1}{|\sin x|^{1/2}} dx = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{1}{|\sin x|^{1/2}} dx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Enligt en tidigare sats vet vi att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar och då är integralen uppåt begränsad och så konvergent.

□