

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122

Torsdag 201022 kl. 08.00-13.00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Fullständiga lösningar ska ges på samtliga problem
OBS: skriv endast på inlämningssidornas framsidor

Hjälpmedel Miniräknare

Examinator Mats Wallin tel 073 765 2000

1. Ett vuxet träd tar upp ungefär 12 kg CO₂ per år. Sveriges yta är 450 000 km². Uppskatta den totala mängden CO₂ som tas upp per år av träden i Sveriges skogar. Svara i enheten ton.

2. Frekvenserna vid maximal utstrålad effekt från Solen och stjärnan Sirius A förhåller sig som $f_{\max, \text{Sirius A}} / f_{\max, \text{Solen}} = 2.4/1.4$. Den totala utstrålade effekten Φ från Sirius A är 24 gånger större än Solens utstrålade effekt. Solens radie är $7 \cdot 10^8$ m. Bestäm radien hos Sirius A.

3. En Carnotprocess har verkningsgraden $\eta = 0.5$ och producerar arbetet 100 kJ per cykel. Beräkna upptagen och avgiven värme per cykel. Om gasen avger värme vid 300 K, vid vilken temperatur tas värme upp?

4. Med den nya standarden är en 0.33 l läskburk 145 mm hög och har diameter 66 mm. Burken är gjord av aluminium med tjockleken 0.1 mm. När burken är i kylskåpet är dess temperatur 8 °C. Vid en viss tidpunkt tas burken ur kylskåpet och placeras i ett rum med temperaturen 20 °C. Hur stort blir värmeflödet Φ genom burkens vägg vid denna tidpunkt? Bortse från värmeöverföring genom burkens lock och botten. Al: $\lambda = 237$ W/(m·K). Värmeöverföringstalet är $\alpha = 5$ W/(m²·K).

5. Ett 20 kg aluminiumblock med starttemperatur 200 °C och ett 20 kg järnblock med starttemperatur 100 °C sätts i kontakt med varandra men är i övrigt värmeisolerade från omgivningen. Bestäm den slutliga jämviktstemperaturen och entropiändringen i aluminiumet, järnet, och totalt. Specifika värmekapaciteten för aluminium: $c_{\text{Al}} = 0.90$ kJ/(kg·K) och för järn: $c_{\text{Fe}} = 0.45$ kJ/(kg·K).

6. En sluten och värmeisolerad behållare med volym 1.5 m^3 innehåller 0.3 kg helium vid trycket 100 kPa . Ett arbete utförs på gasen genom att en externt driven propeller snurrar inuti behållaren tills gasens tryck ökats med 20 kPa .

(a) Bestäm antalet atomer i gasen, samt start och sluttemperaturen.

(b) Bestäm arbetet av propellern på gasen.

7. Studera tillväxten av is på en vattenyta. Antag att luftens temperatur är -10°C och vattnets temperatur är 0°C . Islagrets tillväxt sker i isens undersida genom att den latent värmen för frysningen förs bort med värmeledning genom isen till den omgivande luften. Om isen är 10 cm tjock, beräkna hur lång tid det tar för isens tjocklek att växa med 1 mm . Is: värmeledningsförmåga $\lambda = 2.1 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, densitet $917 \text{ kg}/\text{m}^3$.

8. I roddtävlingar förekommer roddbåtar med olika antal roddare, $N = 1, 2, 4, 6$, osv. Använd dimensionsanalys för att avgöra hur maxhastigheten v beror på antalet roddare N . Antag att v beror på vattnets densitet ρ , båtens volym V , samt effekten P . Antag vidare att $V = NV_1$, $P = NP_1$ där V_1, P_1 är värdena för $N = 1$.

LYCKA TILL!

FORMELBLAD I TERMODYNAMIK

Tyngdaccelerationen	$g = 9.8 \text{ m/s}^2$
Absoluta nollpunkten	$0 \text{ K} = -273.16 \text{ }^\circ\text{C}$
Boltzmanns konstant	$k = 1.380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Gaskonstanten	$R = 8.314 \text{ J/(K mol)}$
Plancks konstant	$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Ljushastigheten	$c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Avogadros konstant	$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$
Atomära massenheten	$u = 1.660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Atommassor m/u	H: 1, He: 4, C: 12, N: 14, O: 16, Ar: 40
Luft	ca 80% N ₂ och 20% O ₂
Atmosfärstryck	$1 \text{ atm} = 101 \text{ kPa}$
Stefan-Boltzmanns konstant	$\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$
Solarkonstanten	$\varphi = 1.4 \text{ kW/m}^2$
Värmekapacitet för vatten vid 15°C	$c = 4.19 \text{ kJ/K kg}$
Förångningsentalpi vatten 100°C, 1 atm	2260 kJ/kg
Värmekapacitet för is vid -4 °C	$c = 2.2 \text{ kJ/K kg}$
Smältentalpi för is	333 kJ/kg
Pris för hushållsel inklusive skatt	1 kr/kWh
Människa effekt: vila/promenad/löpning	$1/2/5 \text{ W/kg}$
Cirkelns omkrets och area	$2\pi R$ och πR^2
Sfärens area och volym	$4\pi R^2$ och $4\pi R^3/3$
Logaritmer	$\ln ab = \ln a + \ln b, \ln a/b = \ln a - \ln b$ $d \ln x / dx = 1/x, \int 1/x dx = \ln x$
Kinetisk energi	$E_K = U = (1/2)mv^2$
Gravitationell potentiell energi	$E_P = mgh, g = 9.8 \text{ m/s}^2$
Tryck	$P = F/A$
Arbete	$dW = -PdV$
Ideal gas	$PV = NkT = nRT$
Monoatomär ideal gas	$U = (3/2)NkT$
Diatomär ideal gas	$U = (5/2)NkT$
Van der Waals tillståndsekvation	$P = NkT/(V - Nb) - a(N/V)^2$
Van der Waals tillståndsekvation	$(P + a_0/v^2)(v - b_0) = RT, a_0 = aN_A^2, b_0 = bN_A$
Isoterm kompressibilitet	$\kappa = -(1/V)(\partial V/\partial P)_T$
Isobar volymutvidgningskoefficient	$\alpha_V = (1/V)(\partial V/\partial T)_P$
Boltzmannfördelningen	$n_i = \text{konstant} \cdot \exp(-E_i/kT)$
Maxwell-Boltzmanns hastighetsfördelning	$f^3(v) = 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2}v^2 \exp(-mv^2/2kT)$
MB fördelning av hastighetskomponent	$f^1(v_x) = \sqrt{m/2\pi kT} \exp(-mv_x^2/2kT)$
Medelhastighet	$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/m\pi}$
Medelkvadrathastighet	$\langle v^2 \rangle = 3kT/m$
Mest sannolika hastighet	$v_p = \sqrt{2kT/m}$
Kollisionstid	$\tau = 1/(n\pi d^2\sqrt{2}\langle v \rangle)$
Medelfri väg	$l = \langle v \rangle \tau = 1/(n\pi d^2\sqrt{2})$
Stöttal	$n^* = P/\sqrt{2\pi mkT}$
Värmefflöde	$\Phi = \Delta Q/\Delta t$
Värmefflödestäthet	$\varphi = \Phi/A = u(T)c/4$
Plancks strålningslag	$u(f, T) = (8\pi hf^3/c^3)/[\exp(hf/kT) - 1]$
Wiens förskjutningslag	$hf_{\max}/kT = 2.821, T\lambda_{\max} = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
Stefan-Boltzmanns lag	$\varphi = \sigma T^4$

Fouriers lag	$\Phi = -\lambda A \Delta T / \Delta x$
Värmeöverföring	$\Phi = \alpha A (T_1 - T_2)$
U-värde	$\Phi = U A \Delta T, 1/U = 1/\alpha + \Delta x/\lambda$
Första huvudsatsen	$dU = dQ + dW$
Isokor värmekapacitet	$C_V = (\partial Q / \partial T)_V = (\partial U / \partial T)_V$
Isobar värmekapacitet	$C_P = (\partial Q / \partial T)_P = (\partial H / \partial T)_P$
En mol ideal gas	$c_P = c_V + R$
Adiabat	$PV^\gamma = \text{konstant}, \gamma = C_P / C_V$
Adiabat	$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}, TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{konstant}$
Adiabatiskt arbete	$W = (P_2 V_2 - P_1 V_1) / (\gamma - 1)$
Carnotprocess	$Q_1 / Q_2 = T_1 / T_2$
Verkningsgrad värmemaskin	$\eta = W / Q_1$
Kylfaktor	$\varepsilon = Q_2 / W$
Värmefaktor	$\varepsilon_v = Q_1 / W$
Entropi	$S = k \ln \Omega$
Kvasistatisk värmeöverföring	$dQ = T dS$
Entalpi	$H = U + PV$
Helmholtz fria energi	$F = U - TS$
Gibbs fria energi	$G = U - TS + PV$

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122 201022

LÖSNINGSSKISSER

1. Antag att det är i genomsnitt 5 m mellan vuxna träd i skogen och att halva Sveriges yta är skog. Då blir ytan per träd $2 \cdot 5^2 = 50 \text{ m}^2/\text{träd}$. Antalet träd blir $450\,000 \text{ km}^2 \cdot (1000 \text{ m/km})^2 / (50 \text{ m}^2) \sim 10^{10}$. Absorberad CO_2 massa blir $10^{10} \cdot 12 \sim 10^{11} \text{ kg/år}$.

SVAR: $\sim 10^8 \text{ ton/år}$.

Siffror från Skogen.se: ca $90 \cdot 10^9$ träd som är minst 1m höga, dvs uppskattningen ovan stämmer hyfsat. Som jämförelse kan nämnas att personbilstrafiken i Sverige släpper ut ca 10^4 ton CO_2 per år.

2. Wiens förskjutningslag $f_{\text{max}} = \text{konstant} \cdot T$ ger

$$\frac{f_{\text{max,SiriusA}}}{f_{\text{max,Solen}}} = \frac{T_{\text{SiriusA}}}{T_{\text{Solen}}} = \frac{2.4}{1.4}$$

Stefan-Boltzmanns lag $\Phi = \sigma AT^4 = \sigma \pi R^2 T^4$ ger

$$\frac{\Phi_{\text{SiriusA}}}{\Phi_{\text{Solen}}} = \frac{R_{\text{SiriusA}}^2}{R_{\text{Solen}}^2} \frac{T_{\text{SiriusA}}^4}{T_{\text{Solen}}^4} = \frac{R_{\text{SiriusA}}^2}{R_{\text{Solen}}^2} \cdot (2.4/1.4)^4 = 24$$

Lös ut radien hos Sirius A:

$$R_{\text{SiriusA}} = 1.67 \cdot R_{\text{Solen}} = 1.2 \cdot 10^9 \text{ m}$$

SVAR $1.2 \cdot 10^9 \text{ m}$

3. Upptagen värme:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{W}{\eta} = \frac{100}{0.5} = 200 \text{ kJ}$$

Avgiven värme:

$$W = Q_1 - Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q_1 - W = 100 \text{ kJ}$$

Temperatur på varma sidan:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0.5 \Rightarrow T_1 = 2T_2 = 600 \text{ K}$$

SVAR: $Q_1 = 200 \text{ kJ}$, $Q_2 = 100 \text{ kJ}$, $T_1 = 600 \text{ K}$

4. Bortse från värmeledningen genom burkens topp eftersom det inte finns en kontaktyta vätska-aluminium-luft. Om underlaget har bra värmeledningsförmåga så kan ledning genom botten bidra till avsvälningen, så vi antar här att burken står på ett isolerande underlägg. Initialt är vätska och aluminium i jämvikt så att ingen konvektion sker i gränsytan.

Cylinderarean:

$$A = \pi dh = \pi \cdot 0.066 \cdot 0.145 = 0.030 \text{ m}^2$$

U-värdet:

$$U = 1/(1/\alpha + \Delta x/\lambda) = 1/(1/5 + 0.1 \cdot 10^{-3}/237) \approx \alpha = 5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

dvs konvektion är den helt dominerande (dvs begränsande) avsvlningsmekanismen.

Initiala värmeffödet:

$$\Phi = UA\Delta T = 5 \cdot 0.030 \cdot (20 - 8) = 1.8 \text{ J/s}$$

SVAR: 1.8 J/s

5. VärmeKapaciteter: $C_{Al} = 20 \cdot 0.90 = 18 \text{ kJ/K}$, $C_{Fe} = 20 \cdot 0.45 = 9 \text{ kJ/K}$.

Bestäm sluttemperaturen T . Energikonserveration ger

$$Q_{Al} + Q_{Fe} = C_{Al}(T - T_{Al}) + C_{Fe}(T - T_{Fe}) = 0 \Rightarrow$$
$$T = \frac{C_{Al}T_{Al} + C_{Fe}T_{Fe}}{C_{Al} + C_{Fe}} = \frac{18 \cdot 200 + 9 \cdot 100}{18 + 9} = 166.7 \text{ }^\circ\text{C} = 439.8 \text{ K}$$

Bestäm entropiändringarna genom att anta reversibla värmeöverföringar. Alla temperaturer måste räknas i kelvin: $T_{Al} = 473.16 \text{ K}$, $T_{Fe} = 373.16 \text{ K}$. Då blir mha $dS = dQ/T = CdT/T$:

$$\Delta S_{Al} = C_{Al} \int_{T_{Al}}^T \frac{dT}{T} = C_{Al} \ln T/T_{Al} = 18 \ln 439.8/473.16 = -1.3149 \text{ kJ/K}$$
$$\Delta S_{Fe} = C_{Fe} \ln T/T_{Fe} = 9 \ln 439.8/373.16 = 1.4794 \text{ kJ/K}$$
$$\Delta S_{tot} = \Delta S_{Al} + \Delta S_{Fe} = 0.1644 \text{ kJ/K}$$

SVAR: $T = 167 \text{ }^\circ\text{C}$, $\Delta S_{Al} = -1.31 \text{ kJ/K}$, $\Delta S_{Fe} = 1.48 \text{ kJ/K}$, $\Delta S_{tot} = 0.16 \text{ kJ/K}$.

6. Problemet visar att ett arbete kan utföras på gasen utan att volymen ändras.

(a) Bestäm först antalet atomer. Molekylmassan $m = 4u$ ger $N = M/m = 0.3/4u = 4.518 \cdot 10^{25}$ Antag ideala gaslagen. Starttemperatur:

$$P_1V = NkT_1 \Rightarrow T_1 = \frac{P_1V}{Nk} = \frac{10^5 \cdot 1.5}{Nk} = 240.6 \text{ K}$$

Sluttemperatur:

$$T_2 = \frac{P_2V}{Nk} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 1.5}{Nk} = 288.7 \text{ K}$$

(b) Ingen värme tillförs och arbetet pga volymsändring är noll, men enligt första lagen utför propellern arbetet

$$W = \Delta U = \frac{3}{2}Nk\Delta T = \frac{3}{2}V\Delta P = \frac{3}{2}1.5 \cdot 20 \cdot 10^3 = 45 \text{ kJ}$$

SVAR: $N = 4.5 \cdot 10^{25}$, $T_1 = 241 \text{ K}$, $T_2 = 289 \text{ K}$, $W = 45 \text{ kJ}$

7. För att undvika att behöva ta med konvektion antar vi att temperaturen i isens gränssytor är 0 °C och -10 °C. Problemet blir då ett rent värmeledningsproblem. Värmeledningen genom is med en ytan A ges av Fouriers lag:

$$\Phi = -\lambda A(T - 0)/h = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta Q = (\lambda A(-T)/h)\Delta t$$

där h är tjockleken hos isen som värmen ΔQ passerar på tiden Δt . Värmen att ledas bort för att isen ska växa med tjockleken Δh ges av

$$\Delta Q = L\Delta M = L\rho A\Delta h$$

där $L = 333 \cdot 10^3$ J/kg är smältentalpin hos is och $\Delta M = \rho A\Delta h$ är massan hos islagret med arean A och tjockleken Δh . Detta ger

$$(\lambda A(-T)/h)\Delta t = L\rho A\Delta h$$

Arean kancellerar. Lös ut Δt :

$$\Delta t = \frac{L\rho h\Delta h}{\lambda(-T)} = 1454 \text{ s} = 24 \text{ min}$$

Enhetskontroll: $\frac{(\text{J/kg})(\text{kg/m}^3)\text{m}^2}{\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})\text{K}} = \frac{\text{J}}{\text{W}} = \text{s}$ OK.

SVAR: 24 minuter

8. Ansätt hastigheten på formen

$$v = \rho^a V^b P^c f = \rho^a (NV_1)^b (NP_1)^c f$$

där ρ är vattnets densitet, $V = NV_1$ är båtens volym, $P = NP_1$ är totala effekten, N är antalet roddare, V_1 är volymen per roddare, P_1 är effekten per roddare och f är en dimensionslös konstant. Dimensionsanalys:

$$[v] = LT^{-1} = [\rho]^a [V]^b [P]^c = (ML^{-3})^a (L^3)^b (ML^2T^{-3})^c$$

vilket ger $c = 1/3$, $a = -1/3$, $b = -2/9$. Insatt i ansatsen ger detta

$$v = \rho^{-1/3} (NV_1)^{-2/9} (NP_1)^{1/3} f \propto N^{1/9}$$

SVAR: $v \propto N^{1/9}$

Detta stämmer bra med uppmätta hastigheter vid roddtävlingar.