

TENTAMEN I VEKTORANALYS
SI1146 Vektoranalys, HT2024

Torsdagen den 17 oktober 2024, kl 14.00 – 19.00

Anteckna på varje blad: Namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.
Tillåtna hjälpmedel: Formelblad som delas ut (ingen räknedosa).

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Bonuspoängen från HT2024 adderas till tentauppgift 1, dock max 6 poäng totalt.

Lösningar: Kommer att finnas på kurshemsidan.

Poäng: Varje uppgift kan ge 6 poäng.

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Notation: (i) (x, y, z) är kartesiska koordinater, och $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ är Ortsvektorn. (ii) (ρ, φ, z) är cylinderkoordinater så att $x = \rho \cos(\varphi)$, $y = \rho \sin(\varphi)$. (iii) (r, θ, φ) är sfäriska koordinater så att $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = r \cos(\theta)$. (iv) $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ är Laplace operatoren. (v) t är tiden, och $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

1. (a) Ett vektorfält ges i sfäriska koordinater genom

$$\mathbf{v} = \frac{\sin(\theta)}{r^2} \mathbf{e}_\theta.$$

- (i) Beräkna rot $\mathbf{v}$ (2p) (ii) Beräkna $\text{div } \mathbf{v}$. (2p)
- (b) Bestäm alla funktioner $U(\rho)$ av $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (oberoende φ och z) som uppfyller Laplaces ekvation $\Delta U = 0$ i $\mathbb{R}^3$. (2p)
2. (a) Beräkna flödesintegralen av vektorfältet $\mathbf{w} = r^{-2} \mathbf{e}_r$ (i sfäriska koordinater i $\mathbb{R}^3$) ur kubens $|x| < a$, $|y| < a$, $|z| < a$ där $a > 0$. (3p)
- (b) Vektorfältet $\mathbf{v}$ uppfyller $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, U är ett skalärfält, och S en yta. Omforma ytintegralen $\int_S (\mathbf{v} \times \nabla U) \cdot d\mathbf{S}$ till en linjeintegral! (3p)
3. (a) Transformera vektorfältet $\mathbf{v} = (x - y, y + x, x)$ till cylinderkoordinater (ρ, φ, z) .
Ledning: $\mathbf{e}_\rho = \cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\mathbf{e}_y$. (2p)
- (b) a_i och b_i för $i = 1, 2, 3$ är komponenter av ett vektorfält i ett kartesiskt koordinatsystem i $\mathbb{R}^3$. Visa att $T_{ij} = a_i b_j$ definierar en tensor av rang 2. (2p)
- (c) En tensor av rang 2 har följande komponenter i ett kartesiskt koordinatsystem K i $\mathbb{R}^3$, $T_{ij} = 1$ om $i = j = 1$ och 0 annars. Bestäm komponenterna av denna tensor i ett koordinatsystem som är vridet med vinkeln α omkring $\mathbf{e}_3$ -axeln i K . (Du behöver inte bry dig om rotationen är medurs eller moturs; du kan använda (b) för att förenkla räkningen.) (2p)

4. (a) Vektorpotentialen från en magnetisk dipol ges av

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

där magnetiska dipolmomentet $\mathbf{m}$ är en konstant vektor ($\mathbf{r} = (x, y, z)$ och $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Beräkna magnetfältet $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ från den magnetiska dipolen! (3p)

(b) För vilka värden på n uppfyller vektorfältet $\mathbf{w} = \rho^n \mathbf{e}_\rho$ ekvationen $\Delta \mathbf{w} = 3\rho^{-2} \mathbf{w}$ för $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$? *Ledningar:* (i) $\Delta \mathbf{w} = \text{grad div } \mathbf{w} - \text{rot rot } \mathbf{w}$. (ii) Räkningen skall genomföras i cylinderkoordinater. (iii) $\mathbf{e}_\rho = (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)/\rho$. (3p)

5. Massdensiteten $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ och hastigheten $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ hos en vätska uppfyller

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p \quad (1)$$

där $p = p(\mathbf{r}, t)$ är trycket. (a) Visa att

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_j(T_{ij}) = 0$$

med T_{ij} komponenter av en tensor av rang 2 som du skall beräkna (v_i är komponenter av $\mathbf{v}$ i ett kartesiskt koordinatsystem). (b) Antag att V är en godtycklig delvolym i området där (1) är uppfyllt. Visa att $\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV$ är lika med en integral över randytan ∂V av V , och bestäm uttrycket för det. (c) Ge fysikaliska tolkningar av ekvationerna i (1). (6p)

6. Bestäm stationära temperaturen $T(\mathbf{r})$ inom området V i $\mathbb{R}^3$ som begränsas av randytorna S_1 och S_2 ,

$$S_1 : \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = \frac{a^2}{16}, \quad z \in \mathbb{R}$$

och

$$S_2 : \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = \frac{a^2}{9}, \quad z \in \mathbb{R},$$

om temperaturen på randytorna S_1 och S_2 är konstanta och lika med T_1 och T_2 respektive ($a > 0$, $T_1 > 0$ och $T_2 > T_1$ är godtyckliga konstanter). *Ledningar:* (i) Temperaturen uppfyller Laplaces ekvation $\Delta T = 0$. (ii) Problemet kan lösas med ansatsen $T = T(u)$ (oberoende av v, w) i elliptiska koordinater (u, v, w) som definieras genom

$$x = a \cosh(u) \cos(v), \quad y = a \sinh(u) \sin(v), \quad z = w$$

($u > 0$, $0 < v < 2\pi$, $-\infty < w < \infty$); **visa att koordinaterna (u, v, w) är ortogonala, och att skalfaktorerna är $h_u = h_v = a\sqrt{\sinh(u)^2 + \sin(v)^2}$, $h_w = 1$.**¹ (iii) OBS att $A \cos(v)^2 + B \sin(v)^2 = C$ för alla v om och bara om $A = C$ och $B = C$. (iv) Kom ihåg att $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$, $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$, $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$. (6p)

LYCKA TILL!

¹Jag skrev fetstilt så att du inte missar detta.

Lösningsföreslag tentamen SI1146, 17 oktober 2024

NOTE: I typed this in quickly: please let me know by email if you find a mistake.

1. (a) (i) $\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{e}_\theta$ ger

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{v} =} \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \begin{vmatrix} h_r \mathbf{e}_r & h_\theta \mathbf{e}_\theta & h_\varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & h_\theta v_\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin(\theta) \mathbf{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & \sin(\theta)/r & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} (\mathbf{e}_r \cdot 0 - r \mathbf{e}_\theta \cdot 0 + r \sin(\theta) \mathbf{e}_\varphi (-\sin(\theta)/r^2)) = \boxed{-\frac{\sin(\theta)}{r^3} \mathbf{e}_\varphi}.$$

- (ii) $\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{e}_\theta$ ger

$$\boxed{\text{div } \mathbf{v} =} \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \partial_\theta (h_r h_\varphi v_\theta)$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\theta \underbrace{(r \sin(\theta) \cdot \sin(\theta)/r^2)}_{\sin(\theta)^2/r} = \frac{1}{r^3 \sin(\theta)} 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \boxed{\frac{2 \cos(\theta)}{r^3}}.$$

- (b) Svar: $U(r) = c \ln(\rho/R)$ med godtyckliga konstanter c och $R > 0$.

Härledning: $\Delta U = (1/\rho) \partial_\rho (\rho \partial_\rho U) = 0$ om och bara om $\partial_\rho (\rho \partial_\rho U) = 0$ för $\rho > 0$; det är sant om och bara om $\rho \partial_\rho U = c$ med en godtycklig konstant c , dvs., $U'(\rho) = c/\rho$, som har allmänna lösningen $U(\rho) = c \ln(\rho/R)$ där $R > 0$.

2. (a) $\mathbf{w}$ uppfyller $\text{div } \mathbf{w} = 0$ för $r > 0$:

$$\text{div } \mathbf{w} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \underbrace{\partial_r (r^2 \sin(\theta)/r^2)}_0 = 0.$$

Fältet är singulär i origon, och därför är integralen över kuben lik med integralen över en godtycklig yta som omslutar origon (argument med Gauss sats som diskuterades under kursens gång och som jag inte upprepar här). Integralen är därför lika med integralen över sfärytan $S_a : r = a > 0$:

$$\oint_{S_a} \underbrace{\mathbf{w}}_{\mathbf{e}_r/r^2} \cdot \underbrace{d\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_r dS} = \oint_{S_a} 1/a^2 dS = 4\pi.$$

Svar: 4π .

- (b)

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{v} \times \nabla U) \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \epsilon_{ijk} v_j (\partial_k U) dS_i \\ &= \int_S \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{-\epsilon_{ikj}} \partial_k (v_j U) dS_i - \int_S U \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{-\epsilon_{ikj}} \partial_k v_j dS_i = - \int_S \nabla \times (\phi \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} + \int_S U \underbrace{\nabla \times \mathbf{v}}_0 \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \oint_{\partial S} \phi \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

p.g.a. Stokes satsen och $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (∂S är linjen som begränsar ytan S).

3. (a) $\mathbf{e}_\rho = (x, y, 0)/\rho$ ger $v_\rho = \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{v} = (x^2 + y^2)/\rho = \rho$. $\mathbf{e}_\varphi = (-y, x, 0)/\rho$ ger $v_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{v} = (x^2 + y^2)/\rho = \rho$. $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ ger $v_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v} = x = \rho \cos(\varphi)$.

Svar: $\mathbf{v} = \rho(\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\varphi) + \rho \cos(\varphi)\mathbf{e}_z$.

(b) a_i och b_i är vektorer, dvs., komponenterna i ett annat kartesisk koordinatsystem K' är $a'_i = L_{ik}a_k$ och $b'_j = L_{jl}b_l$. Detta ger komponenterna and tensorn i K' : $T'_{ij} = a'_ib'_j = L_{ik}L_{jl}T_{kl}$. Det visar att T_{ij} är en tensor.

(c) Snabb Lösning: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ger $(\mathbf{e}_1)_i = \delta_{i,1}$, och $T_{ij} = \delta_{1,i}\delta_{1,j}$ är därför lika med $(\mathbf{e}_1)_i(\mathbf{e}_1)_j$.

$(\mathbf{e}_1)'_i = (\cos \alpha, \pm \sin \alpha, 0)$ ger alltså $T'_{ij} = (\mathbf{e}_1)'_i(\mathbf{e}_1)'_j$ dvs.

$$(T'_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)^2 & \pm \sin(\alpha) \cos(\alpha) & 0 \\ \pm \sin(\alpha) \cos(\alpha) & \sin(\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(båda företecken är OK). Uppgiften kan också lösas genom att beräkna $T'_{ij} = L_{ik}L_{il}T_{kl}$ direkt, där

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \pm \sin(\alpha) & 0 \\ \mp \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(det var metoden som visades under kursens gång).

4. (a) Funktionen $f(r) = r^{-3}$ av r uppfyller $\partial_i f(r) = f'(r)x_i/r = -3x_i r^{-5}$, och därför

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}f(r))]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j \epsilon_{klm}m_l x_n f(r) = \underbrace{\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl}} m_l \underbrace{\partial_j(x_n f(r))}_{\delta_{jn}f(r) - x_j x_n f'(r)/r} \\ &= (m_i \delta_{jn} - m_j \delta_{in})(\delta_{jn}r^{-3} - 3x_j x_n r^{-5}) \\ &= m_i \underbrace{\delta_{jj}}_3 r^{-3} - \underbrace{m_j \delta_{ij}}_{m_i} r^{-3} - 3m_i \underbrace{x_j x_j}_{r^2} r^{-5} + 3m_j x_j x_i r^{-5} \\ &= [3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}r^{-5} - \mathbf{m}r^{-3}]_i. \end{aligned}$$

Svar:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{m}r^2}{r^5}.$$

(b)

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\underbrace{\rho \cdot \rho^n}_{\rho^{n+1}}) = (n+1)\rho^{n-1},$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} = \mathbf{e}_\rho \partial_\rho (n+1)\rho^{n-1} = \mathbf{e}_\rho (n+1)(n-1)\rho^{n-2} = \mathbf{e}_\rho (n^2 - 1)\rho^{n-2},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ \rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Detta ger

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{e}_\rho (n^2 - 1)\rho^{n-2} = 3\rho^{-2}\mathbf{w} = 3\rho^{n-2}\mathbf{e}_\rho,$$

dvs., $n^2 - 1 = 3$, som har lösningar $\boxed{n = \pm 2}$.

5. (a) Ekvationerna i (1) i indexnotation är

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v_i) = 0, \quad \rho \partial_t v_i + \rho v_j \partial_j v_i = -\partial_i p.$$

Detta ger

$$\partial_t(\rho v_i) = v_i \underbrace{\partial_t \rho}_{-\partial_j(\rho v_j)} + \underbrace{\rho \partial_t v_i}_{-\rho v_j \partial_j v_i - \partial_i p} = -\partial_j(v_i \rho v_j) - \partial_j \delta_{ij} p = -\partial_j(\rho v_i v_j + p).$$

Det visar resultatet med $T_{ij} = \rho v_i v_j + \delta_{ij} p$.

(b)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \partial_t(\rho v_i) dV = - \int_V \partial_j(T_{ij}) dV = - \oint_{\partial V} T_{ij} dS_j$$

med Gauss universalsatsen.

(c) Första ekvationen i (1) är kontinuitetsekvationen: om vi integrerar det över ett godtycklig volymen så får vi

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{S},$$

som visar att $\rho \mathbf{v}$ är massströmtätheten av vätskan: tidsändringen av vätskans massa i ett godtycklig volymen är lika med flödet av massan in i volymen.

Andra ekvationen i (1) kan tolkas som Newton:s lag:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}$$

där $\mathbf{f} = -\nabla p$ är krafttätheten: masstätheten gånger accelerationen är lika med krafttätheten. Accelerationen är

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{v} \dot{x} + \partial_y \mathbf{v} \dot{y} + \partial_z \mathbf{v} \dot{z} = \partial_t \mathbf{v} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

där $\dot{\mathbf{r}}$ tolkas som $\mathbf{v}$.

6.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \cosh(u) \cos(v) \\ a \sinh(u) \sin(v) \\ w \end{pmatrix}$$

ger

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} a \sinh(u) \cos(v) \\ a \cosh(u) \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -a \cosh(u) \sin(v) \\ a \sinh(u) \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = 0,$$

som visar att koordinaterna är ortogonala.

Skalfaktorerna ges av

$$h_u^2 = (\partial_u \mathbf{r})^2 = a^2(\sinh(u)^2 \cos(v)^2 + \underbrace{\cosh(u)^2}_{1+\sinh(u)^2} \sin(v)^2) = a^2(\sinh(u)^2 + \sin(v)^2),$$

p.g.a. $\sin(v)^2 + \cos(v)^2 = 1$, och

$$h_v^2 = (\partial_v \mathbf{r})^2 = a^2(\underbrace{\cosh(u)^2}_{1+\sinh(u)^2} \sin(v)^2 + \sinh(u)^2 \cos(v)^2) = a^2(\sin(v)^2 + \sinh(u)^2) = h_u^2,$$

$$h_w^2 = (\partial_w \mathbf{r})^2 = 1.$$

Det visar att $h_u = h_v = a\sqrt{\sin(v)^2 + \sinh(u)^2}$ och $h_w = 1$.

Med ansatsen $T = T(u)$ får vi

$$\Delta T = \frac{1}{h_u h_v h_w} \partial_u \left(\frac{h_v h_w \partial_u T}{h_v} \right) = \frac{1}{h_u h_v h_w} T''(u) = 0,$$

dvs., den allmänna lösningen är

$$T(u) = c_1 + c_2 u$$

med godtyckliga konstanter c_1 och c_2 .

Ytan S_1 är

$$(a \cosh(u)/5)^2 \cos(v)^2 + (a \sinh(u)/3)^2 \sin(v)^2 = (a/4)^2,$$

dvs.

$$a \cosh(u)/5 = a/4, \quad a \sinh(u)/3 = a/4 \Rightarrow \cosh(u) = \frac{5}{4}, \quad \sinh(u) = \frac{3}{4}.$$

Det är konsistent p.g.a.

$$\cosh(u)^2 - \sinh(u)^2 = (5^2 - 3^2)/4^2 = 1,$$

och det kan lösas genom

$$\cosh(u) + \sinh(u) = e^u = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2,$$

dvs., ytan S_1 motsvara $u = \ln(2)$.

Ytan S_2 är

$$(a \cosh(u)/5)^2 \cos(v)^2 + (a \sinh(u)/4)^2 \sin(v)^2 = (a/3)^2,$$

dvs.

$$a \cosh(u)/5 = a/3, \quad a \sinh(u)/4 = a/3 \Rightarrow \cosh(u) = \frac{5}{3}, \quad \sinh(u) = \frac{4}{3}.$$

Det är konsistent p.g.a.

$$\cosh(u)^2 - \sinh(u)^2 = (5^2 - 4^2)/3^2 = 1,$$

och det kan lösas genom

$$\cosh(u) + \sinh(u) = e^u = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 3,$$

dvs., ytan S_2 motsvara $u = \ln(3)$.

Detta ger randvillkoren

$$T(\ln(2)) = c_1 + c_2 \ln(2) = T_1, \quad T(\ln(3)) = c_1 + c_2 \ln(3) = T_2,$$

d.v.s.

$$T_2 - T_1 = c_2(\ln(3) - \ln(2)) \Rightarrow c_2 = \frac{T_2 - T_1}{\ln(3) - \ln(2)}$$

och

$$c_1 = T_1 - c_2 \ln(2) = T_1 - \frac{(T_2 - T_1) \ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)}$$

Svar:

$$T(u) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{u - \ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} \quad (\ln(2) < u < \ln(3)).$$

Anmärkingar:

- OBS att ekvationerna som definierar S_1 och S_2 kan skrivas som

$$S_1 : \quad (x/a_1)^2 + (x/b_1)^2 = 1, \quad a_1 = 5a/4, \quad b_1 = 3a/4$$

och

$$S_2 : \quad (x/a_2)^2 + (y/b_2)^2 = 1, \quad a_2 = 5a/3 > a_1, \quad b_2 = 4a/3 > b_1,$$

som visar att det finns ett volumen mellan S_1 och S_2 .

- Du kanske undrar: om man har två ytor som ovan med (a_1, b_1) och (a_2, b_2) där $a_2 > a_1$ och $b_2 > b_1$, när kan problemet lösas med elliptiska koordinater? Interessant fråga. Jag låter dig själv hitta svaret:-)
- Du kanske undrar: varför tog jag bara lösningar $\cosh(u) > 0$ och $\sinh(u) > 0$ ovan? Svaret är: jag provade dem andra lösningar, men dem gav inget.