



**SF1673 Analys i en variabel**  
**Tentamen**  
**den 18 oktober 2024**

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Danijela Damjanović

Tentamen består av åtta uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de fem första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt sex poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

| Del | Poäng | Innehåll              | Fx | E  | D  | C  | B  | A  |
|-----|-------|-----------------------|----|----|----|----|----|----|
| I   | 20    | Grundläggande problem | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| II  | 18    | Avancerade problem    | 0  | 0  | 4  | 8  | 11 | 14 |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är välmotiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

---

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt  $f(x) = \begin{cases} 3x + x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(a) Visa att  $f$  är kontinuerlig.

(1 p)

(b) Beräkna derivatan  $f'(x)$  för alla  $x \in \mathbb{R}$ . Är  $f'$  kontinuerlig? Motivera ditt svar.

(3 p)

2. Visa olikheterna

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

för  $x > 0$ .

*Tips: Taylor sats.*

(4 p)

3. Låt  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 1$ . Bestäm alla deriverbara funktioner  $y = y(x)$  som uppfyller ekvationen

$$\int_0^x (y(t))^p dt + 1 = y(x).$$

(4 p)

4. (a) Avgör för vilka konstanter  $a$  konvergerar integralen

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^a}.$$

(2 p)

- (b) Visa att  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$  är konvergent och  $\leq \frac{\pi+1}{2}$ .

(2 p)

5. (a) Beräkna längden  $l(a, b)$  av kurvan  $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$ ,  $0 \leq x \leq b < a$ .

(3 p)

- (b) Vad händer med längden då  $b \rightarrow 0$ ? Vad händer med längden då  $b \rightarrow a$ ?

(1 p)

### DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Definera vad som menas med att  $f$  har ett lokalt maximum i punkten  $c \in (a, b)$ .

(1 p)

- (b) Bevisa följande sats: om  $f$  är deriverbar i punkten  $c$  och har ett lokalt maximum i  $c$ , då gäller att  $f'(c) = 0$ .

(3 p)

- (c) Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1 \\ 0, & x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Finns det ett lokalt maximum av  $f$  i något punkt  $c \in (0, 1)$ ? Motivera ditt svar.

(2 p)

(Obs.  $(m, n) = 1$  om och endast om det ända naturliga tal som delar både  $m$  och  $n$  är 1.)

7. (a) Formulera och bevisa medelvärdessatsen för intergaler (utan att använda generaliserade medelvärdessatsen).

(3 p)

- (b) Låt  $F(x) = \frac{1}{x + \ln x}$ . Låt  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , och låt  $A(n)$  beteckna arean under graf av  $F$  mellan  $x = n$  och  $x = n + 1$ . Vad är  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n)$ ? Motivera ditt svar.

(1 p)

- (c) Undersök om  $\sum_{n=1}^\infty A(n)$  är konvergent eller divergent.

(2 p)

8. (a) För en funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definera vad som menas med en Riemann summa. Formulera Riemann Sats för integraler (dvs. satsen som handlar om Riemann summor och integralen).

(2 p)

- (b) Låt  $(a_n)$  vara talföljden  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \ln(1 + \frac{k}{n})$ . Visa att  $a_n$  är konvergent och beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

(4 p)