

Lösningsförslag till Tentamen i Modern Fysik (SH1012/SH1013) 08.00-13.00, 2014-08-22, KTH, Stockholm

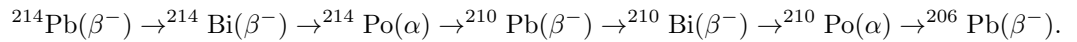
Tentamen består av 8 problem som vardera ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng. Betyget baseras på uppnådd poäng (efter tillägg av 0.5 bonuspoäng per godkänd inlämningsuppgift, dvs maximalt 4 bonuspoäng). Betygskriterierna är följande:
A:36-40, B:32-35, C:28-31, D:24-27, E:20-23, Fx:18-19, F:0-17

1. Isotopen Pb-214 bildas spontant i sönderfallskedjan som börjar med naturligt förekommande uran (U-238). Beskriv hur denna kedja av sönderfall fortsätter från ^{214}Pb (steg för steg, med redovisande av sönderfallstyp och isotoper/nuklider) fram till en stabil nuklid [3 p].

Om vi i ett isolerat system har en viss mängd ^{214}Pb -atomkärnor vid en given tidpunkt, hur lång tid tar det tills endast 1% återstår? [2 p]

Lösning:

Från nuklidkartan kan vi utläsa hur sönderfallskedjan fortsätter från Pb-214:



Andra sönderfallsvägar är också möjliga, men denna är mest sannolik.

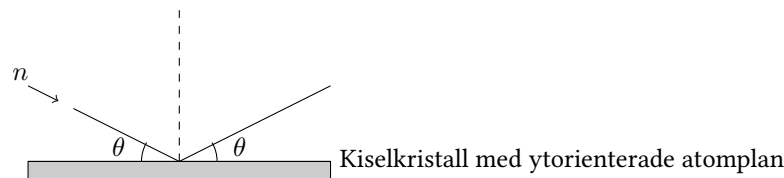
Vi har för radiaktiva sönderfall:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$t = -\frac{\ln(N/N_0)}{\lambda} = -\frac{t_{1/2} \ln(N/N_0)}{\ln(2)} = [\text{här}] = -\frac{26.8 \cdot 60 \cdot \ln(0.01)}{\ln(2)} = 10683 [\text{s}] = 178 [\text{m}].$$

Vi ser att det tar 178 minuter (knappt 3 timmar) innan endast 1% återstår av antalet Pb-214-kärnor.

2. På KTH, under Drottning Kristinas väg vid Q-husen, fanns tidigare en kärnreaktor kallad R1. En doktorand vid R1 studerade på 1960-talet långsamma neutroner. Kärnreaktorn emitterade ett kraftigt flöde av termiska och långsamma neutroner i ett kontinuerligt energi-intervall (0.001 eV - 10 eV). Vid ett visst experiment ville doktoranden välja ut endast neutroner med den kinetiska energin 8.2 meV. För att kunna separera ut just dessa neutroner använde han en s.k *monokromator*; han kollimerade neutronstrålen från reaktorn till en smal stråle och lät neutronerna falla in mot en kiselkristall (med det redan kända avståndet 3.14 Å mellan atomplanen). Vilken vinkel θ mot kristallplanet gav den önskade kinetiska energin på de reflekterade neutronerna? [5 p]



Lösning:

Vi börjar med att räkna ut de Broglie-våglängden för neutroner som har den kinetiska energin, $E_k = 8.2 \text{ meV}$. Detta är en mycket liten energi om man jämför med neutronens viloenenergi, så vi räknar icke-relativistiskt:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{p^2}{2m} \\ \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{4.1357 \cdot 10^{-15} [\text{eV} \cdot \text{s}]}{\sqrt{2 \cdot (939.573 \cdot 10^6 / c^2) \cdot 8.2 \cdot 10^{-3} [\text{eV}]}} = \\ &= \frac{4.1357 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^8 [\text{m}]}{\sqrt{2 \cdot 939.573 \cdot 8.2 \cdot 10^3}} = 3.161 \cdot 10^{-10} = 3.16 [\text{\AA}]. \end{aligned}$$

Här har vi använt neutronmassan, m , från formelsamlingen. För att få reflektionsvinkeln, θ , använder vi Bragg-villkoret:

$$\begin{aligned} n\lambda &= 2d \sin \theta \\ \sin \theta &= \frac{n\lambda}{2d} \\ \theta &= [n = 1] = \arcsin(\lambda/2d) = \arcsin(3.16/6.28) = 30.2^\circ \end{aligned}$$

Detta är den enda möjligheten eftersom endast $n = 1$ ger en reell lösning för θ .

3. En mycket enkel/naiv modell av en atomkärna kan se ut på följande sätt; en neutron befinner sig i en rektangulär lådpotential med oändligt höga sidor, i en dimension.

Applicera denna modell för att studera en energiövergång i atomkärnan ^{12}C . Gör först en rimligt uppskattning angående potentialgropens bredd. Neutronen befinner sig det första (lägsta) exciterade tillståndet och hoppar sedan ned till grundtillståndet; beräkna vilken energi (uttryckt i eV) som denna övergång motsvarar [3 p].

Energien skickas ut i form av en foton. Beräkna dess våglängd och berätta vad denna strålning kallas för [2 p].

Lösning:

Formelbladet ger lösningarna för den oändliga lådpotentialen;

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

I detta fall är det rimligt att sätta a till atomkärnans diameter:

$$a = 2R = 2R_0 A^{1/3} = [A = 12; R_0 \approx 1.2 \cdot 10^{-15} \text{ [m]}] \approx 5.5 \cdot 10^{-15} \text{ [m]}.$$

I detta fall vill vi beräkna energiskillnaden mellan $n = 2$ och $n = 1$:

$$\begin{aligned} \Delta E_{2 \rightarrow 1} &= \frac{(2^2 - 1^2)h^2}{8ma^2} = \frac{3 \cdot (4.1357)^2 \cdot 10^{-30} [\text{eV} \cdot \text{s}]^2}{8 \cdot (939.573 \cdot 10^6 [\text{eV}]/c^2) 5.5^2 \cdot 10^{-30} [\text{m}]^2} = \\ &= \frac{3 \cdot (4.1357)^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 [\text{eV}]}{8 \cdot 939.573 \cdot 10^6 \cdot 5.5^2} = 20.3 \cdot 10^6 [\text{eV}]. \end{aligned}$$

Vi får alltså en energiskillnad på 20.3 MeV. Detta är (lite större än men) ungefär av samma storleksordning som låga excitationsenergies i ^{12}C .

För att räkna ut våglängden så använder vi sambandet $E = h\nu = hc/\lambda$:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{4.1357 \cdot 10^{-15} \cdot 2 \cdot 10^8 [\text{eV} \cdot \text{s}] [\text{m/s}]}{20.3 \cdot 10^6 [\text{eV}]} = 6.1 \cdot 10^{-14} [\text{m}].$$

Denna strålning kallas *gammastrålning*. Det gör den oavsett våglängd om den skickas ut från atomkärnan vid de-excitation.

4. De s.k. ädelgaserna (He, Ne, Ar, ...) är kemiskt stabila eftersom de har fyllda elektronskal. Förklara varför de två första ädelgaserna har just atomtalen 2 (helium) och 10 (neon) (beskriv tydligt hur de relevanta kvanttalen ger fyllda skal vid just 2 respektive 10 elektroner) [2 p].

Det gula ljuset från en natriumlampa motsvarar en våglängd vid ca 589 nm (det är egentligen två närliggande våglängder, men det är av mindre vikt i just detta problem). Detta ljus motsvarar övergången från ett 3p-tillstånd ner till 3s-grundtillståndet, dvs en övergång utan ändring av n -kvanttal. Grundläggande kvantmekanik för vätes spektrum har ju dock lärt oss att energin på de olika tillstånden endast beror av huvudkvanttalet. Förklara tydligt varför 3s- och 3p-tillstånden har så helt olika energier i natriumatomen [3 p].

Lösning:

Kvanttalen n, l, m_l, m_s beror (delvis) av varandra, se tex formelbladet. För $n = 1$ har vi alltid $l = 0$ och därmed $m_l = 0$. Detta ger bara en kombination. Men m_s kan alltid anta två olika värden; således har vi möjligheterna: $n, l, m_l, m_s = 1, 0, 0, +\frac{1}{2}$ och $n, l, m_l, m_s = 1, 0, 0, -\frac{1}{2}$. Pauliprincipen säger att alla elektroner måste ha olika kvantalsuppsättningar. Således är $n = 1$ -skalet fyllt redan av två elektroner. Detta motsvarar *helium*. För $n = 2$ har vi fler möjligheter för n, l, m_l, m_s : $[2, 0, 0, \frac{1}{2}]$, $[2, 0, 0, -\frac{1}{2}]$, $[2, 1, 0, \frac{1}{2}]$, $[2, 1, 0, -\frac{1}{2}]$, $[2, 1, -1, \frac{1}{2}]$, $[2, 1, -1, -\frac{1}{2}]$, $[2, 1, +1, \frac{1}{2}]$, $[2, 1, +1, -\frac{1}{2}]$.

och $[2, 1, +1, -\frac{1}{2}]$, dvs 8 olika kombination. Vi har alltså 2 elektroner i det fyllda $n = 1$ -skalet och ytterligare 8 i det fyllda $n = 2$ -skalet. Detta summerar till 10 elektroner, vilket motsvarar *neon*.

Anledningen till att p-tillståndet och s-tillståndet inte har samma energi i natrium beror på hur deras orbitaler (som har $l = 0$ respektive $l = 1$) rör sig i förhållande till de andra 10 elektronerna i atomen. Om sannolikhetstätheten (vågfunktionen i kvadrat) för en elektron har en hög amplitud nära atomkärnan så är den inte *skärmad* av de andra elektronerna, utan upplever protonernas fulla columbpotential. Om, å andra sidan, sannolikhetstätheten är liten nära atomkärnan så kommer andra elektroner i högre grad att ligga mellan elektronen och atomkärnan, så att den effektiva columbpotentialen blir lägre. Detta ger olika energier för olika l -kvanttal och är förklaringen till energiskillnaden mellan 3s- och 3p-tillstånden i natrium.

5. En positivt laddad pi-meson i vila sönderfaller till en myon och en myon-neutrino:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Vi antar att neutrinoen är masslös. Om vi kan detektera den laddade myonen, vilken (kinetisk) energi förväntar vi oss mäta upp? [5 p]

Lösning:

Vi behöver massorna $m_{\pi 0} = 139.6 \text{ MeV}/c^2$ respektive $m_{\mu 0} = 105.7 \text{ MeV}/c^2$. (Dessa massor finns inte i formelbladet, men skrevs upp på tavlan under tentamen.)

Vi har först för energins bevarande:

$$E_\pi = E_\mu + E_\nu. \quad (1)$$

Eftersom pionen är i vila så har vi:

$$E_\pi = m_{\pi 0} c^2, \quad (2)$$

där $m_{\pi 0}$ är pionens vilomassa.

Eftersom systemet är i vila före sönderfallet så har vi ingen total linjär rörelsemängd, dvs $p_{tot} = 0$. Efter sönderfallet så har vi alltså $p_\mu = p_\nu$ om vi betraktar absolutbeloppen av rörelsemängderna. Eftersom neutrinoen är masslös så har vi således:

$$E_\nu = p_\nu c = p_\mu c. \quad (3)$$

För myonen har vi nu sambandet:

$$E_\mu^2 = p_\mu^2 c^2 + m_{\mu 0}^2 c^4, \quad (4)$$

vilket ger rörelsemängden:

$$p_\mu = \frac{\sqrt{E_\mu^2 - m_{\mu 0}^2 c^4}}{c}. \quad (5)$$

Nu kan vi skriva om ekv. 1 med hjälp av ekv. 2,3 och 5, samt räkna lite för att få fram ett uttryck för E_μ :

$$m_{\pi 0} c^2 = E_\mu + p_\mu c = E_\mu + \sqrt{E_\mu^2 - m_{\mu 0}^2 c^4} \quad (6)$$

$$E_\mu = \left(\frac{m_{\pi 0}^2 + m_{\mu 0}^2}{2m_{\pi 0}} \right) c^2. \quad (7)$$

Nu får vi lätt fram den kinetiska energin för myonen:

$$E_{\mu k} = E_{\mu} - m_{\mu 0} c^2 = \left[\left(\frac{m_{\pi 0}^2 + m_{\mu 0}^2}{2m_{\pi 0}} \right) - m_{\mu 0} \right] c^2 = \quad (8)$$

$$= \frac{(m_{\pi 0} - m_{\mu 0})^2 c^2}{2m_{\pi 0}} = \frac{(139.6 - 105.7)^2}{2 \cdot 139.6} = 4.12 \text{ [MeV]}. \quad (9)$$

Detta är alltså den energi vi kommer att mäta upp.

6. På ett nanofysiklab experimenterar en ingenjör med en ny halvledarkrets där en potentialbarriär (som vi förenklat kan anta ha rektangulär form) med tjockleken 1.2 nm har en varierbar energipotential. En inkommande ström av elektroner med energin 3.69 eV möter barriären som till en början ligger på energin 4.0 eV. Endast en liten andel av elektronerna tar sig igenom på andra sidan barriären, men de genererar en mätbar ström. Om ingenjören vill fördubbla denna ström, vilket värde ska potentialen sättas till då? [3 p]

Ingenjören testar sedan att långsamt sänka potentialen ytterligare, ända tills transmissionen är total (100%), trots att potentialen har ett värde större än 0. Vilket värde har potentialen nu? [2 p]

Lösning:

Vi har en elektronenergi, E , och en potential U_0 . Eftersom $E < U_0$ i första deluppgiften så uppkommer elektronströmmen genom barriären pga *tunnling*. Transmissionen skrivs:

$$T = \frac{4 \frac{E}{U_0} (1 - \frac{E}{U_0})}{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} (1 - \frac{E}{U_0})}$$

Uppgiften blir svår att lösa analytiskt. Men insatta värden på E och U_0 , a , m (elektronmassan), samt $\hbar$, så får vi dock lätt fram ett värde på T :

$$T = \frac{4 \cdot \frac{3.69}{4.0} (1 - \frac{3.69}{4.0})}{\sinh^2 \left[\sqrt{2 \cdot 0.511 \cdot 10^6 \cdot (4.0 - 3.69)} \left(\frac{2\pi \cdot 1.2 \cdot 10^{-9}}{3.10^8 \cdot 4.1357 \cdot 10^{-15}} \right) \right] + 4 \cdot \frac{3.69}{4.0} (1 - \frac{3.69}{4.0})} =$$

$$= \frac{0.285975}{233.38 + 0.285975} = 0.0012238.$$

Vi söker det värde på potentialen, U , som ger $T = 2 \cdot 0.0012238 = 0.00245$. Nu kan vi testa olika värden på U tills vi kommer nära $T = 0.00245$. En första gissning; $U = 3.85$ eV ger $T = 0.0047$, så det är för lågt U . $U = 3.9$ eV ger $T = 0.0029$, så det är för lågt U . $U = 3.95$ eV ger $T = 0.0018$, så det är för högt U . $U = 3.92$ eV ger $T = 0.00245$. Vi ser att potentialen ska ligga nära 3.92 eV för att transmissionskoefficienten (och därmed tunnlingsströmmen) ska fördubblas.

Tunnling kan inte ge upphov till en total transmission ($T = 1$). I den andra deluppgiften så inser vi därför att vi har $U_0 < E$. Då gäller följande uttryck för T :

$$T = \frac{4 \frac{E}{U_0} (\frac{E}{U_0} - 1)}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} (\frac{E}{U_0} - 1)}.$$

Vi söker ett (noll-skilt) värde på U_0 sådant att $T = 1$, s.k. *resonant transmission*. Detta får vi om vi har:

$$\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] = 0.$$

Detta ger nu:

$$\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

För $n = 0$ så är $E = U_0$ och det ger inte $T = 1$ enligt lite mer betraktande av formlerna ovan. Första tillfället (då U sänks ner under E) då $T = 1$ motsvarar därför $n = 1$:

$$U_0 = E - \frac{\hbar^2}{8ma^2} = 3.69 - \frac{(4.1357)^2 \cdot 10^{-30} [\text{eV}]^2 [\text{s}]^2 \cdot 3^2 \cdot 10^{16} [\text{m/s}]^2}{8 \cdot 0.511 \cdot 10^6 [\text{eV}] \cdot 1.2^2 \cdot 10^{-18} [\text{m}]^2} =$$

$$= 3.69 - \frac{(4.1357)^2 \cdot 10^{-30} \cdot 9 \cdot 10^{16} [\text{eV}]}{8 \cdot 0.511 \cdot 10^6 \cdot 1.2^2 \cdot 10^{-18}} = 0.26 \cdot 10^{-9} = 3.69 - 0.26 = 3.42 [\text{eV}].$$

Resonant transmission uppträder första gången då U_0 har sänkts till 3.42 [eV].

7. Spektrallinjer från den diatomära molekylen CH observerades 1997 från nebulo-
san NGC7027. Man fann en serie rotationsövergångar. Övergången motsvarande
 $J = 2 \rightarrow J = 1$ (där J är rotationskvanttalet) detekterades vid våglängden 179.62 μm ,
dvs långt in i det infraröda området. Med antagandet att vi kan betrakta molekylen
som en stel rotor, beräkna våglängden som motsvarar övergången $J = 3 \rightarrow J = 2$ [2 p].
Beräkna avståndet, R , mellan kolatomen och väteatomen [3 p].

Lösning:

För en roterande molekyl har vi de kvantiserade energinerna, E_{rot} , enligt:

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \quad J = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

Vi kan nu skriva:

$$\frac{\Delta E_{3 \rightarrow 2}}{\Delta E_{2 \rightarrow 1}} = \frac{\frac{\hbar^2}{2I} [3(3+1) - 2(2+1)]}{\frac{\hbar^2}{2I} [2(2+1) - 1(1+1)]} = \frac{3}{2} \quad (11)$$

Vi vet också att energiskillnaderna motsvarar våglängderna på de emitterade foto-
nerna:

$$\frac{\lambda_{2 \rightarrow 1}}{\lambda_{3 \rightarrow 2}} = \frac{h\nu_{3 \rightarrow 2}}{h\nu_{2 \rightarrow 1}} = \frac{\Delta E_{3 \rightarrow 2}}{\Delta E_{2 \rightarrow 1}} = \frac{3}{2} \quad (12)$$

$$\lambda_{3 \rightarrow 2} = \frac{2}{3} \lambda_{2 \rightarrow 1} = \frac{2}{3} 179.62 \cdot 10^{-6} = 119.95 \cdot 10^{-6} [\text{m}]. \quad (13)$$

Övergången $J = 3 \rightarrow J = 2$ har alltså våglängden 119.95 $[\mu\text{m}]$. (Det experimen-
tella värdet ligger på 119.90 $[\mu\text{m}]$, vilket visar att rotationsmodellen fungerar bra i
detta fall.)

För andra deluppgiften så skriver vi upp sambandet mellan tröghetsmomentet, I ,
och radien, R :

$$I = \mu R^2 \quad (14)$$

$$R = \sqrt{\frac{I}{\mu}} \quad (15)$$

Från ekvationerna 10 och 11 ser vi att energiskillnaden ger tröghetsmomentet:

$$\Delta E_{2 \rightarrow 1} = \frac{\hbar^2}{2I} \cdot 4 = \frac{\hbar^2}{2\pi^2 I} \quad (16)$$

$$I = \frac{\hbar^2}{2\pi^2 \Delta E_{2 \rightarrow 1}} \quad (17)$$

Den effektiva massan, μ , skrivs:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (18)$$

Därmed kan ekvation 15 användas för att beräkna radien:

$$R = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \sqrt{\frac{\frac{h^2}{2\pi^2 \Delta E_{2 \rightarrow 1}}}{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}} = \sqrt{\frac{\frac{h^2 \lambda_{2 \rightarrow 1}}{2\pi^2 h c}}{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}} = \sqrt{\frac{\frac{4.1357 \cdot 10^{-15} [\text{eV}] [\text{s}] \cdot 119.95 \cdot 10^{-6} [\text{m}] \cdot 3 \cdot 10^8 [\text{m}] [\text{s}]^{-1}}{2\pi^2}}{\frac{1 \cdot 12.9315 \cdot 10^6 [\text{eV}]}{12+1}}} = \quad (19)$$

$$= \sqrt{\frac{4.1357 \cdot 10^{-15} \cdot 179.62 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 13 [\text{m}]^2}{2\pi^2 \cdot 12 \cdot 931.5 \cdot 10^6}} = 1.15 \cdot 10^{-10} [\text{m}]. \quad (20)$$

I uträkningen ovan så har vi approximerat väteatomens massa till 1 atomär massenhet; detta ger ett fel mindre än 1% (C-12 har massan 12.0 [u]). Vi ser att avståndet mellan de två atomerna i CH-molekylens är ca 1.15 Å.

8. Kaptenen på en rymdstation skickar ut sina två bästa piloter (Lisa och Johan) i varsitt rymdskepp i två vinkelräta riktningar för att studera omgivningarna. Rymdskepp 1 (Lisas skepp) rör sig (från rymdstationen sett) med hastigheten 0.6 c i positiva x -riktningen. Rymdskepp 2 (med Johan vid spakarna) rör sig (från rymdstationen sett) med hastigheten 0.8 c i positiva y -riktningen. Beräkna hastigheten v/c som Lisa observerar att Johan har relativt henne [5 p].

Lösning:

Vi kallar rymdstationens inertialsystem för S och Lisas inertialsystem för S' . Den relativa hastigheten mellan S och S' är $v = 0.6 c$ i positiva x -riktningen. Johans hastighet i x -led sedd från S är $u_x = 0$. Johans hastighet i x -led sedd från S' är u'_x . På motsvarande sätt har vi $u_y = 0.8 c$ (Johan relativt rymdstationen) samt u'_y (Johan relativt Lisa).

Vi skriver nu upp de relativistiska hastighetstransformationerna i x - och y -led:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2} u'_x)},$$

där $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Vi söker u'_x och u'_y , så vi kan invertera formlerna:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = \frac{0 - 0.6c}{1 - 0} = -0.6c$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} u_x)} = \frac{0.8c\sqrt{1 - 0.6^2}}{1 - 0} = 0.64c,$$

Hastigheten v_{rel} , som Johan har relativt Lisa beräknas till slut:

$$v_{rel}^2 = u_x'^2 + u_y'^2$$

$$v_{rel} = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2} = c \cdot \sqrt{(-0.6)^2 + 0.64^2} = 0.88 c.$$

./.