

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122

Måndag 2023-12-18 kl 14:00-19:00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Fullständiga lösningar ska ges på samtliga problem
OBS: skriv endast på inlämningssidornas framsidor

Hjälpmedel Miniräknare, linjal

Examinator Mats Wallin tel 073 765 2000

Användbara data: jordens radie 6371 km, solens radie 696340 km, avståndet från jorden till solen $1.496 \cdot 10^8$ km, solarkonstanten 1.361 kW/m^2 .

1. Beräkna uppvärmningskostnaden per dygn för eluppvärmning av en stuga. Antag inne-temperatur 20°C och utetemperatur -10°C . Antag sammanlagd area 100 m^2 hos väggar och tak med $U = 0.4 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ samt 4 fönster med area 0.5 m^2 vardera med $U = 2.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$.

2. En Stirlingmotor med verkningsgraden $\eta = 0.20$ tillförs värmen 2.00 kJ per cykel. Motorn levererar effekten 4.00 kW . Bestäm (a) antalet cykler per sekund och (b) värmen som avges i varje cykel.

3. Ett system med $C_P = a + bT$ där a, b är konstanter genomgår en isobar process från T_1 till T_2 . Beräkna den tillförda värmen och entropiändringen hos systemet.

4. Använd dimensionsanalys för att bestämma ett uttryck för frekvensen f hos ljudet från en cirkulär trumma. Antag att frekvensen beror på den radiella spänningen σ dvs kraften som verkar likformigt på trumskinnets omkrets delat med omkretsen, trummans diameter D samt trumskinnets massa per areaenhet ρ .

5. Beräkna solens yttemperatur.

6. Uppskatta hur många kubikmeter av vatten som faller som nederbörd (regn eller snö) över hela jordens yta på ett år.

VÄND!

7. Utgå (utan härledning) från Clausius-Clapeyrons ekvation som visar att tryck och temperatur vid övergången från vätska till gas är relaterade genom

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{TV}$$

där L är latent värmet och V är gasens volym.

(a) Bestäm sambandet mellan tryck $P(T)$ och temperatur T vid övergången, givet att T_0 är övergångstemperaturen vid trycket $P(T_0)$. Antag att gasen är ideal.

(b) Antag (utan härledning) att lufttrycket vid höjden h över havet ges av

$$P(h) = P_0 e^{-mgh/kT}$$

där $P_0 = 1$ atm, m är medelmolekylmassan för luft, och lufttemperaturen kan antas vara 0°C . Uppskatta mha (a) koktemperaturen för vatten på toppen av Mount Everest som har höjden $h \approx 9$ km. Antag att L är en konstant.

8. Ett system uppfyller ekvationerna

$$U = \frac{1}{2}PV, \quad T^2 = \frac{AU^{3/2}}{VN^{1/2}}$$

där $A > 0$ är en konstant. Bestäm entropin S hos systemet som funktion av U, V, N .
Ledning: studera dS .

LYCKA TILL!

LÖSNINGAR

1. Beräkna kostnaden per dygn för eluppvärmning av ett hus med ett rum. Antag inne-temperatur $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ och utetemperatur $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Antag sammanlagd area 100 m^2 hos väggar och tak med $U = 0.4\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$ samt 4 fönster med area 0.5 m^2 vardera med $U = 2.0\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$.

Energiåtgången på ett dygn blir

$$E = 24 \cdot 3600 \cdot (100 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.5 \cdot 2.0) \cdot (20 - (-10)) = 114\text{ MJ}$$

Antag elpriset 1 kr/kWh . Konvertering: $1\text{ kWh} = 1000\text{ Wh} = 1000\text{ W} \times 3600\text{ s} = 3.6\text{ MJ}$. Uppvärmningskostnaden blir

$$114\text{ MJ} \times 1\text{ kr}/3.6\text{ MJ} = 32\text{ kr}$$

2. En Stirlingmotor med verkningsgraden $\eta = 0.20$ tillförs värmen 2.00 kJ per cykel. Motorn levererar effekten 4.00 kW . Bestäm (a) antalet cykler per sekund och (b) värmen som avges i varje cykel.

(a) Verkningsgraden ges av

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{\text{in}}}$$

Utfört arbete per cykel blir

$$\Delta W = \eta \Delta Q_{\text{in}} = 0.20 \cdot 2.00 = 0.40\text{ kJ/cykel}$$

Med n cykler per sekund blir effekten=arbetet per sekund = antal cykler/sekund $\times$ arbetet per cykel, dvs $P = n\Delta W$. Detta ger

$$n = \frac{P}{\Delta W} = 10\text{ cykler per sekund}$$

(b) Upptagen och avgiven värme per cykel uppfyller

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{\Delta Q_{\text{ut}}}{\Delta Q_{\text{in}}}$$

Detta ger

$$\Delta Q_{\text{ut}} = \Delta Q_{\text{in}}(1 - \eta) = 1.60\text{ kJ}$$

3. Ett system med $C_P = a + bT$ där a, b är konstanter genomgår en isobar process från T_1 till T_2 . Beräkna den tillförda värmen och entropiändringen hos systemet.

För att beräkna värmeöverföringen antas en reversibel process. Tillförd värme fås genom integration av $dQ = C_P dT$:

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} C_P dT = \int_{T_1}^{T_2} (a + bT) dT = \left[aT + \frac{1}{2}bT^2 \right]_{T_1}^{T_2} = a(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}b(T_2^2 - T_1^2)$$

Vid en irreversibel process blir värmeöverföringen mindre.

Entropiändringen fås genom integration av den reversibla värmeöverföringen mha $dS = dQ/T$:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_P}{T} dT = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{a}{T} + b \right) dT = a \ln \frac{T_2}{T_1} + b(T_2 - T_1)$$

Denna entropiändring gäller oavsett om processen är reversibel eftersom S är en tillståndsfunktion.

4. Använd dimensionsanalys för att bestämma ett uttryck för frekvensen f hos ljudet från en cirkulär trumma. Antag att frekvensen beror på den radiella spänningen σ dvs kraften som verkar likformigt på trumskinnets omkrets delat med omkretsen, trummans diameter D samt trumskinnets massa per areaenhet ρ .

Ansats:

$$f = k\sigma^x D^y \rho^z$$

där k är en dimensionslös konstant. Dimensioner:

$$[f] = T^{-1}, [\sigma] = \frac{[F]}{L} = MT^{-2}, [D] = L, [\rho] = ML^{-2}$$

Detta ger

$$T^{-1} = (MT^{-2})^x L^y (ML^{-2})^z = M^{x+z} L^{y-2z} T^{-2x}$$

Identifiera exponenter:

$$x = 1/2, z = -1/2, y = -1$$

Lösning:

$$f = \frac{k}{D} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

5. Beräkna solens yttemperatur.

Flödet vid solens yta ges av Stefan-Boltzmanns lag:

$$\Phi = \sigma T^4 A_{\text{sol}} = \sigma T^4 4\pi R_{\text{sol}}^2$$

Flödet genom en sfär vid jorden med centrum i solen är samma:

$$\Phi = \varphi 4\pi R^2$$

där R =avståndet jorden-solen. Detta ger

$$\sigma T^4 4\pi R_{\text{sol}}^2 = \varphi 4\pi R^2$$

$$T = \left[\frac{\varphi}{\sigma} \left(\frac{R}{R_{\text{sol}}} \right)^2 \right]^{1/4} = 5770 \text{ K}$$

6. Uppskatta hur många kubikmeter av vatten som faller som nederbörd (regn eller snö) över hela jordens yta på ett år.

Nederbörd består av förångat vatten. Uppskatta därför volymen vatten som förångas ur haven på ett år. Antag vidare att solenergin helt blir till entalpi som förångar vatten. Detta ger en överskattning eftersom solenergi även överförs till annat än entalpi. Effekten som träffar jordytan är $1-0.3=0.7$ gånger solarkonstanten $\varphi = 1.4 \text{ kW/m}^2$ där 0.3 är atmosfärens reflektionsförmåga eller albedo. Total energi per år är tvärsnittsarean $\times$ effekten $\times$ tiden:

$$E = \pi R^2 \times 0.7\varphi \times 356 \cdot 24 \cdot 3600 = 3.9 \cdot 10^{21} \text{ kJ}$$

Förångningsentalpin är $L = 2260 \text{ kJ/kg}$. Massan som förångas är $M = \rho V$ där $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ är densiteten och V volymen. Volymen som förångas ges då av $0.7E \sim ML = \rho V L$ där faktorn 0.7 kommer från att 70% av jordytan täcks av hav. Detta ger

$$V \sim \frac{0.7E}{\rho L} = 1.2 \cdot 10^{15} \sim 10^{15} \text{ m}^3$$

Wikipedia säger $5 \cdot 10^{14} \sim 10^{15} \text{ m}^3$.

7. Utgå (utan härledning) från Clausius-Clapeyrons ekvation som visar att tryck och temperatur vid övergången från vätska till gas är relaterade genom

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{TV}$$

där L är latent värmet och V är gasens volym.

(a) Bestäm sambandet mellan tryck $P(T)$ och temperatur T vid övergången, givet att T_0 är övergångstemperaturen vid trycket $P(T_0)$. Antag att gasen är ideal.

(b) Antag (utan härledning) att lufttrycket vid höjden h över havet ges av

$$P(h) = P_0 e^{-mgh/kT}$$

där $P_0 = 1$ atm, m är medelmolekylmassan för luft, och lufttemperaturen kan antas vara 0°C . Uppskatta mha (a) koktemperaturen för vatten på toppen av Mount Everest som har höjden $h \approx 9$ km. Antag att L är en konstant.

(a) $PV = NkT$ ger

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{TV} = \frac{LP}{NkT^2}$$

Inför $l = L/N$ = latent värme per molekyl dvs latent värmet per kg gånger molekylmassan i kg:

$$l = Lm = L \times 18u = 2260 \times 18u \text{ kJ}$$

Då fås

$$\frac{dP}{P} = \frac{l}{k} \frac{dT}{T^2}$$

Integrera:

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P} &= \frac{l}{k} \int \frac{dT}{T^2} \\ \ln \frac{P(T)}{P(T_0)} &= \left(\frac{l}{kT_0} - \frac{l}{kT} \right) \\ P(T) &= P(T_0) e^{l/kT_0 - l/kT} \end{aligned}$$

(b) För vatten är $T_0 = 373$ K koktemperaturen vid trycket $P(T_0) = 1$ atm. Beräkna trycket på Mount Everest. Medelmolekylmassan för luft är $m = (0.2 \times 32 + 0.8 \times 28)u = 28.8u$. Vid $T_{\text{luft}} = 273$ K blir

$$\frac{P(h)}{P_0} = e^{-mgh/kT_{\text{luft}}} = 0.327$$

Sätt detta lika med uttrycket i (a) och lös ut koktemperaturen T :

$$\begin{aligned} \frac{P(T)}{P(T_0)} &= e^{l/kT_0 - l/kT} = e^{-mgh/kT_{\text{luft}}} \\ \frac{l}{kT_0} - \frac{l}{kT} &= -\frac{mgh}{kT_{\text{luft}}} \\ \frac{1}{T} &= \frac{1}{T_0} + \frac{mgh}{lT_{\text{luft}}} \\ T &= \left(\frac{1}{T_0} + \frac{mgh}{lT_{\text{luft}}} \right)^{-1} = 344 \text{ K} = 71^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Notera att u kancellerar i den numeriska beräkningen.

8. Ett system uppfyller ekvationerna

$$U = \frac{1}{2}PV, \quad T^2 = \frac{AU^{3/2}}{VN^{1/2}}$$

där $A > 0$ är en konstant. Bestäm entropin S hos systemet som funktion av U, V, N .
Ledning: studera dS .

Första lagen

$$dU = TdS - PdV$$

ger

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV = \frac{1}{T}dU + \frac{2U}{VT}dV$$

Mha

$$\frac{1}{T} = \frac{V^{1/2}N^{1/4}}{A^{1/2}U^{3/4}} = A^{-1/2}U^{-3/4}V^{1/2}N^{1/4}$$

blir

$$dS = A^{-1/2}U^{-3/4}V^{1/2}N^{1/4} \left(dU + \frac{2U}{V}dV \right)$$

Noga inspektion visar att

$$U^{-3/4}V^{1/2} \left(dU + \frac{2U}{V}dV \right) = 4d(U^{1/4}V^{1/2})$$

Detta ger

$$dS = 4A^{-1/2}d(U^{1/4}V^{1/2})N^{1/4}$$

Integration ger

$$S = 4A^{-1/2}U^{1/4}V^{1/2}N^{1/4} + S_0$$

där S_0 är en integrationskonstant.

Notera att S är extensiv som väntat.

$$S = N4A^{-1/2}u^{1/4}v^{1/2} + Ns_0$$

där $u = U/N, v = V/N, s_0 = S_0/N$.