



KTH Teknikvetenskap

SF1672 Linjär algebra
Tentamen fredag, 5 april 2024, 08:00–11:00

Examinator: Tilman Bauer

Tillåtna hjälpmedel: inga

Tentamen består av sex uppgifter fördelade på tre delar. Del A testar förmågan att lösa grundläggande standardproblem. Del B innehåller lite svårare problem. Del C testar förmågan att lösa avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg.

Bonuspoäng från del A av inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del A och motsvarande för del B. (Bonuspoäng räknas bara under samma läsår.)

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell:

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Totalt	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3				

Lösningarna måste vara väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden tilldelas inte full poäng.

Del A

1. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a+4 & a+2 & -a-2 \\ a & 2-a & a \\ 2a+2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

har ett enda egenvärde $\lambda = 2$ oavsett valet av a . Bestäm den geometriska multipliciteten av detta egenvärde för alla värden på a . **(6 p)**

Lösningsförslag: Den sökta geometriska multipliciteten ges av dimensionen av kärnan av matrisen

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} a+2 & a+2 & -(a+2) \\ a & -a & a \\ 2a+2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Matrisen är singulär (annars hade det inte varit korrekt att 2 är egenvärde): tredje raden är summan av de första två raderna. Matrisen är aldrig nollmatrisen, frågan är alltså när rangen blir 1. Detta händer precis när $a = 0$ eller $a = -2$.

Svar: Den geometriska multipliciteten är 2 om $a = 0$ eller $a = -2$ och annars 1.

2. Betrakta följande vektorer i $\mathbb{R}^5$:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Varför är $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u})$ inte en ortonormalbas? (1 p)
- b) Bestäm en ortonormalbas till det vektorrum V som spänns upp av $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}$. (4 p)
- c) Förklara, utan att göra ytterligare beräkningar, varför $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}\}$ är linjärt oberoende. (1 p)

Lösningsförslag:

- a) Vektorena $\mathbf{t}$ och $\mathbf{u}$ är inte ortogonala:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -3 \neq 0.$$

- b) Eftersom $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{u}$ redan är ortogonala och $\mathbf{t}$ är ortogonal mot $\mathbf{r}$ och $\mathbf{s}$ så behövs det bara ett steg i Gram-Schmidt-metoden för att göra även $\mathbf{t}$ ortogonal mot alla andra vektorer:

$$\mathbf{t}' = \mathbf{t} - \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{-3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Därmed är $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}', \mathbf{u})$ en sådan sökt ortonormalbas.

- c) Eftersom det handlar om fyra vektorer som spänner det 4-dimensionella vektorrummet V så måste de vara linjärt oberoende.

Del B

3. Betrakta den (singulära) "telefonmatrisen" $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

- a) Visa att A avbildar tetraedern

$$\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

på en triangel i $\mathbb{R}^3$.

(3 p)

- b) Bestäm triangelns area.

(3 p)

Lösningsförslag:

- a) Bilden $A\Delta$ är polygonet med hörnpunkter $\mathbf{0}$, $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Observera att A, B, C ligger på en linje med riktningsvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, och på denna linje ligger B mellan A och C . Vi kan alltså bortse från B och bilden är triangeln med hörn $\mathbf{0}, A, C$.

- b) Parallelogrammet som spänns upp av A och C har dubbla arean av den sökta triangeln och dess area ges av absolutbeloppet av kryssprodukten:

$$A \times C = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}; \quad \|A \times C\| = 6\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = 6\sqrt{6}.$$

Arean av triangeln är alltså $3\sqrt{6}$.

4. Två linjer i $\mathbb{R}^3$ ges av

$$L_1: \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad L_2: \mathbf{x} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Målet med denna uppgift är att konstruera en ortogonal matris A som avbildar linjen L_1 på linjen L_2 .

- a) Bestäm de punkter P_1 och P_2 på L_1 respektive L_2 som ligger närmast origo.

(2 p)

- b) Varför måste den sökta matrisen A avbilda P_1 på P_2 och riktningsvektorn av L_1 på $\pm$ riktningsvektorn av L_2 ?

(2 p)

- c) Bestäm A .

(2 p)

Lösningsförslag:

- a) Punkterna kan beräknas på olika sätt: genom att minimera ett kvadratisk polynom, genom projektion, eller genom minstakvadratmetoden. Den sista går ut på att hitta en bästa approximation λ till ekvationen $\mathbf{x} = 0$. Vi får $\lambda = -\frac{5}{9}$ och $\mu = 0$. Vi får alltså

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad P_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- b) Ortogonala matriser uppfyller $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ för alla vektorer $\mathbf{x}$. Eftersom L_1 ska avbildas på L_2 så måste den punkt med minsta norm på L_1 avbildas på den punkt med minsta norm på L_2 . Dessa punkter är P_1 och P_2 . Som tur är har dessa punkter samma norm, annars hade det inte fungerat. Dessutom måste A avbilda riktningsvektoren för L_1 på en multipel av riktningsvektoren för L_2 . Då båda riktningsvektorerna har samma längd så måste skaleringsfaktorn vara ± 1 .
- c) Vi bestämmer ON-baser $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ för $\mathbb{R}^3$ som är anpassade för L_1 respektive L_2 . Basen $\mathcal{B}_i$ består av den normerade Ortsvektorns till P_i , normerade riktningsvektorn för L_i samt en tredje vektor som kan fås av kryssprodukten av de andra två:

$$\mathcal{B}_1 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right); \quad \mathcal{B}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

Matrisen A måste avbilda vektorerna i $\mathcal{B}_1$ på vektorerna i $\mathcal{B}_2$ (det finns ett val av tecken vid de sista två vektorerna, så A är inte helt unik). Den ges därmed av

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 2\sqrt{2} & -3 \\ -1 & 2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -\sqrt{2} & -4 \\ -3 & 2\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{(3\sqrt{2})^2} \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 2\sqrt{2} & -3 \\ -1 & 2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 16 & -2 & -8 \\ 8 & 8 & 14 \\ 2 & -16 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & -1 & -4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Del C

5. Vi har två okända symmetriska matriser $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Matrisen A har egenvärdena 0 och 1 och matrisen B har egenvärdena -1 och 1.
- a) Visa att 0 är ett egenvärde till AB . (1 p)
- b) Visa att AB har ett till egenvärde som ligger i intervallet $[-1, 1]$. (3 p)

- c) Visa att det andra egenvärdet till AB är ± 1 om och endast om $AB = BA$. (2 p)

Lösningsförslag:

- a) Om A har 0 som egenvärde så är A singulär. Då måste även AB vara singulär, d.v.s. ha ett egenvärde som är 0.
- b) Vi kan välja ON-baser i vilka A eller B är diagonala, men kanske inte en bas i vilken båda A och B är samtidigt diagonala. Vi väljer alltså en ON-bas i vilken A är diagonal, d.v.s. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Matrisen B har formen $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ i samma bas. Eftersom spåret är summan av egenvärdena så är $d = -a$ och eftersom determinanten är produkten av egenvärdena så är $a^2 + b^2 = 1$. Därmed är

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & -a \end{bmatrix}$$

Eftersom denna matris är undertriangulär så är egenvärdena 0 och $-a$, där $a^2 \leq a^2 + b^2 \leq 1$.

- c) Vi beräknar

$$BA = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

Vi ser att $AB = BA$ om och endast om $b = 0$, vilket är ekvivalent med $a = \pm 1$.

6. Delmängden S av $\mathbb{R}^3$ ges av

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x^2 + 4xy + 5y^2 - 2yz + z^2 = 0 \right\}.$$

- a) Är S ett linjärt delrum? Motivera ditt svar. (4 p)
- b) Ange en parameterform för en linje som ligger i S . (2 p)

Lösningsförslag:

- a) Ekvationen kan skrivas om som

$$(x + 2y)^2 + (y - z)^2 = 0,$$

vilket över de reella talen är ekvivalent med $x + 2y = 0$ och $y - z = 0$. Detta är ett linjärt ekvationssystem och därför är S ett linjärt delrum, nämligen en linje.

- b) Genom Gausselimination ser man lätt att S spänns upp av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Linjen ges alltså av

$$\mathbf{x} = \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$