

KTH Fysik

Tentamen i **Fysikens matematiska metoder**

SI1200; SI1140 Del 2; SI1143

Fredagen den 8 march 2024 kl 8:00 – 13:00

Anteckna på varje blad: namn, personnummer, och problemnummer.

Tillåtna hjälpmedel: bara formelsamlingen som delas ut

Obs! Miniräknare ej tillåten.

Notera gärna dina **bonuspoäng** på din tentamens första sida.

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Lösningar: Kommer att finnas på kurshemsidan (Canvas)

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Inför och förklara konstanter och symboler du behöver!

Notation: $u_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$; $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$; $x \in \mathbb{R}$ betyder $-\infty < x < \infty$

OBS: Om inget annat skrivs så kan man få full poäng även om man inte beräknar alla integraler.

1. ¹ Bestäm funktionen $U(x, t)$, $0 \leq x \leq L$ och $t \geq 0$, som uppfyller följande problem

$$\begin{cases} U_{tt}(x, t) - c^2 U_{xx}(x, t) = A \sin(\Omega t) & (0 < x < L, t > 0), \\ U(0, t) = 0, \quad U(L, t) = 0 & (t > 0), \\ U(x, 0) = 0 & (0 < x < L) \\ U_t(x, 0) = 0 & (0 < x < L) \end{cases}$$

där $c > 0$, $L > 0$, $A > 0$ och $\Omega > 0$ är konstanter. Du kan anta att Ω inte är en resonansfrekvens. (6p)

2. (a) Beräkna temperaturen $T(r, \theta)$, $R \leq r \leq 2R$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$, som uppfyller $T(r, \theta) = T(r, \theta + 2\pi)$ och

$$\begin{aligned} T_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r} T_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2} T_{\theta\theta}(r, \theta) &= 0 \quad (R < r < 2R, 0 < \theta < 2\pi), \\ T(R, \theta) &= T_0 + T_1 \cos(\theta), \quad T_r(2R, \theta) = 0 \quad (0 < \theta < 2\pi) \end{aligned}$$

där $R > 0$, $T_0 > 0$ och $T_1 > 0$ är konstanter. (4p) (b) Ange en detaljerad fysikalisk tolkning av problemet i (a). *Ledning:* Rita gärna en bild. (2p)

3. Ett cirkulärt plant inspänt membran med radie $R > 0$ är i vila (dvs., jämviktsläget) och träffas vid tiden $t = 0$ av en impuls p (i kg m/s) jämnt fördelad över hela membranet. (a) Ställ upp en matematisk modell för tidutvecklingen av membranets form efter pulsen. (2p) (b) Lös modellen i (a)! (4p) *Ledning:* Ett svar utan integraler krävs för full poäng. $\int J_0(x) x dx = x J_1(x)$, $\int J_0(x)^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 [J_0(x)^2 + J_1(x)^2]$.

(v.g.v.)

¹Dina bonuspoäng från hemtalen under VT2024 adderas till dina poäng på uppgift 1, dock kan du maximalt få 6 poäng från uppgift 1 och hemtalen tillsammans.

4. Densiteten $n(z, t)$ av ett ämne inom området $z \geq 0$ och vid tiden $t \geq 0$ uppfyller följande PDE problem,

$$\begin{cases} n_t(z, t) - Dn_{zz}(z, t) = 0 & (z > 0, t > 0), \\ n_z(0, t) = 0 & (t > 0), \\ n(z, 0) = N_0\delta(z - z_0) & (z > 0) \end{cases}$$

där $D > 0$, $N_0 > 0$ och $z_0 > 0$ är konstanter.

(a) Lös problemet! (3p) (b) Ange definitionen av Greensfunktionen till problemet. Bestäm Greensfunktionen! (3p)

5. Ett homogent klot med radie R har vid tiden $t = 0$ konstant temperatur T_0 . För tider $t > 0$ värms klotet upp av en värmekälla jämnt fördelad över hela klotet, och värmemängden per tidsenhet och volymen som produceras av värmekällan, K (i $\text{J}/\text{m}^3\text{s}$), är konstant i tiden. Klotets randtemperatur är lika med T_0 för alla tider $t > 0$. Ställ upp modellen för temperaturen inom klotet, och lös modellen. Alla integraler skall beräknas för full poäng. (6p) *Ledning:* $\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x)$.
6. Bestäm snabbaste vägen i xy -planet från punkten $(x, y) = (R, 0)$ till punkten $(x, y) = (0, 2R)$ om beloppet av hastigheten, $v(x, y)$, är proportionellt mot avståndet från origo:

$$v(x, y) = \frac{ds}{dt} = v_0 \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R};$$

$v_0 > 0$ och $R > 0$ är konstanter ($ds^2 = dx^2 + dy^2$). (6p) *Ledning:* Ställ upp integralen som ger tiden det tar om man följer en väg $r = r(\theta)$ mellan punkterna (r, θ är polära koordinater). Bestäm sedan vägen som minimerar denna tid.

LYCKA TILL!

Lösningsföreslag till tentamen i Fysikens matematiska metoder 240308
 I TYPED THIS QUICKLY: PLEASE LET ME KNOW BY EMAIL IF YOU FIND
 ANY MISTAKES/TYPOS. THANKS.

1. Ansatsen

$$U(x, t) = \sum_n f_n(x) g_n(t)$$

ger egenfunktioner $f_n(x)$ och egenvärdena λ_n som lösning av problemet

$$-f''(x) = \lambda f(x), \quad f(0) = f(L) = 0.$$

Detta ger

$$f_n(x) = \sin(k_n x), \quad \lambda_n = k_n^2, \quad k_n = n \frac{\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

och

$$g_n''(x) + (ck_n)^2 g_n(x) = \frac{2}{L} \int_0^L A \sin(\Omega t) \sin(k_n x) dx \equiv C_n \sin(\Omega t), \quad g_n(0) = g_n'(0) = 0$$

där

$$C_n = \frac{2A}{L} \int_0^L \sin(k_n x) dx = \frac{2A}{L k_n} (1 - (-1)^n).$$

En partikulärlösning till g_n -problemet är $C_n \sin(\Omega t) / (-\Omega^2 + (k_n c)^2)$, och allmänna lösningen är

$$g_n(t) = a_n \cos(k_n c t) + b_n \sin(k_n c t) + \frac{C_n}{-\Omega^2 + (k_n c)^2} \sin(\Omega t)$$

med godtyckliga konstanter a_n och b_n . Villkoret $g_n(0) = 0$ ger $a_n = 0$, och $g_n'(0) = 0$ ger

$$b_n k_n c + \frac{C_n \Omega}{-\Omega^2 + (k_n c)^2} = 0 \Rightarrow b_n = -\frac{C_n \Omega / (k_n c)}{-\Omega^2 + (k_n c)^2}.$$

Detta ger

$$g_n(t) = \frac{C_n}{-\Omega^2 + (k_n c)^2} \left(\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{k_n c} \sin(k_n c t) \right).$$

Svar:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{-\Omega^2 + (k_n c)^2} \left(\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{k_n c} \sin(k_n c t) \right) \sin(k_n x), \quad k_n = n \frac{\pi}{L}$$

där

$$C_n = \frac{2A}{L k_n} (1 - (-1)^n).$$

Alternative solution (sketchy): We first try to find a particular solution $U_{part}(x, t) = f(x) \sin(\Omega t)$ to the PDE and BC (boundary conditions). Inserting this into the PDE and BC we obtain

$$f''(x) + (\Omega/c)^2 f(x) = -(A/c^2), \quad f(0) = f(L) = 0.$$

This ODE has the general solution

$$f(x) = -A/\Omega^2 + c_1 \cos(\Omega x/c) + c_2 \sin(\Omega x/c),$$

and the boundary conditions give the following conditions,

$$\begin{aligned} -A/\Omega^2 + c_1 &= 0, & -A/\Omega^2 + c_1 \cos(\Omega L/c) + c_2 \sin(\Omega L/c) &= 0 \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{A}{\Omega^2}, & c_2 &= \frac{A}{\Omega^2 \sin(\Omega L/c)} (1 - \cos(\Omega L/c)). \end{aligned}$$

Thus,

$$f(x) = \frac{A}{\Omega^2} \left(-1 + \cos(\Omega x/c) + \frac{(1 - \cos(\Omega L/c)) \sin(\Omega x/c)}{\sin(\Omega L/c)} \right).$$

The ansatz

$$U(x, t) = f(x) \sin(\Omega t) + u(x, t)$$

leads to a standard homogeneous problem for $u(x, t)$ (model of string discussed in the first lecture) with the initial conditions

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = -f(x)\Omega$$

which has the solution

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x) \sin(k_n c t) \quad k_n = n \frac{\pi}{L}$$

where

$$b_n = -\frac{2\Omega}{L k_n c} \int_0^L f(x) \sin(k_n x) dx.$$

Svar:

$$U(x, t) = f(x) \sin(\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x) \sin(k_n c t) \quad k_n = n \frac{\pi}{L}.$$

2. (a) Ansatsen

$$T(r, \theta) = T_0 + f(r) \cos(\theta)$$

ger

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{1}{r^2} f(r) = 0, \quad f(R) = T_1, \quad f'(2R) = 0.$$

Allmänna lösningen till ODE är $f(r) = c_1 r + c_2/r$. $f'(2R) = 0$ ger $c_1 - c_2/(2R)^2 = 0$, dvs.

$$f(r) = c_2(r/(2R)^2 + 1/r).$$

Villkoret $f(R) = T_1$ ger $c_2 = 4T_1/(5R)$. Svar:

$$T(r, \theta) = T_0 + \frac{4T_1}{5} \left(\frac{r}{4R} + \frac{R}{r} \right) \cos(\theta).$$

(b) Stationära temperaturfördelning i ett cylindrisk rör. Röret är så långt att temperaturen är z -oberoende. r, θ är polära koordinater: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Temperaturen vid den inre randytan $r = R$ av röret är $T_0 + T_1 \cos(\theta)$, och yttre randytan $r = 2R$ är perfekt isolerad (ingen värme kan strömma in eller ut där).

3. Problemet är rotationssymmetrisk $\Rightarrow$ membranets form $u = u(r, t)$ beror bara på radien $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ och tiden t .

Problemet lyder

$$\begin{aligned} u_{tt}(r, t) - c^2(\Delta u)(r, t) &= 0 \quad (0 < r < R, t > 0) \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) &= 0 \quad (t > 0) \\ u(r, 0) = 0, \quad u_t(r, 0) &= C \quad (0 < r < R) \end{aligned} \quad (1)$$

där $C = p/R^2\pi\rho$, $(\Delta u)(r, t) = u_{rr}(r, t) + (1/r)u_r(r, t)$, och c är en konstant som karakteriserar membranets material och spänningen (OBS att pulsen p är lika med $Mu_t(r, 0)$ där ρ är membranens masstäthet (i kg/m²) och $M = R^2\pi\rho$ är membrans massa).

Ansatsen

$$u(r, t) = \sum_n f_n(r)g_n(t)$$

ger egenfunktionerna $f_n(r)$ och egenvärdarna λ_n som lösning till problemet

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \lambda f(r) = 0, \quad |f(0)| < \infty, \quad f(R) = 0.$$

Detta ger

$$f_n(r) = J_0(k_n r), \quad \lambda_n = k_n^2, \quad k_n = \alpha_{0,n}/R, \quad n = 1, 2, \dots,$$

där $\alpha_{0,n}$ är nollställarna till Besselfunktionen $J_0(z)$: $J_0(\alpha_{0,n}) = 0$. g_n -problemet blir då

$$g''_n(t) + (ck_n)^2 g_n(t) = 0, \quad g_0(0) = 0, \quad g'_n(0) = \frac{\int_0^R dr r C J_0(k_n r)}{\int_0^R dr r J_0(k_n r)^2} = \frac{2C}{k_n R J_1(k_n R)}.$$

Detta har lösningen

$$g_n(t) = g'_n(0) \frac{\sin(k_n ct)}{k_n c}.$$

Svar:

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2C}{k_n R J_1(k_n R)} \frac{\sin(k_n ct)}{k_n c} J_0(k_n r), \quad k_n = \frac{\alpha_{0,n}}{R}.$$

4. (a) Problemet kan lösas med jämnad spegling: funktionen

$$U(z, t) = \begin{cases} n(z, t) & (z > 0) \\ n(-z, t) & (z < 0) \end{cases}$$

uppfyller

$$U_t(z, t) - DU_{zz}(z, t) = 0 \quad (z \in \mathbb{R}, t > 0), \quad U(x, 0) = N_0\delta(z - z_0) + N_0\delta(z + z_0) \quad (z \in \mathbb{R}).$$

Det har lösningen

$$U(z, t) = N_0 G_0(z - z_0, t) + N_0 G_0(z + z_0, t), \quad G_0(z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-z^2/4Dt} \quad (t > 0, z \in \mathbb{R})$$

enligt formelsamlingen.

Svar:

$$n(z, t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \left(e^{-(z-z_0)^2/4Dt} + e^{-(z+z_0)^2/4Dt} \right) \quad (z > 0, t > 0).$$

(b) Greensfunktionen $G(z, t; z', t')$ är lika med lösningen $u(z, t)$ till problemet

$$\begin{cases} u_t(z, t) - Du_{zz}(z, t) = \delta(z - z')\delta(t - t') & (z > 0, t > 0), \\ u_z(0, t) = 0 & (t > 0), \\ u(z, 0) = 0 & (z > 0). \end{cases}$$

Problemet kan lösas med jämnad spegling: funktionen

$$U(z, t) = \begin{cases} n(z, t) & (z > 0) \\ n(-z, t) & (z < 0) \end{cases}$$

uppfyller

$$\begin{cases} U_t(z, t) - DU_{zz}(z, t) = \delta(z - z')\delta(t - t') + \delta(z + z')\delta(t - t') & (z \in \mathbb{R}, t > 0), \\ U(z, 0) = 0 & (z \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

som har lösningen

$$U(z, t) = \theta(t - t')[G_0(z - z_0, t - t') + G_0(z + z_0, t - t')]$$

med $G_0(z, t)$ ovan (standardproblem i kursen; det härleddes i föreläsningen och i kursboken; $\theta(x)$ är Heaviside funktionen: $\theta(x) = 1$ om $x > 0$ och $\theta(x) = 0$ om $x < 0$).

Svar:

$$G(z, t; z', t') = \frac{\theta(t - t')}{\sqrt{4\pi D(t - t')}} \left(e^{-(z-z')^2/4D(t-t')} + e^{-(z+z')^2/4D(t-t')} \right) \quad (z > 0, t > 0)$$

där $z' > 0, t' > 0$.

5. Problemet är rotationsymmetriskt: $T = T(r, t)$ beror bara på radien $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ och tiden $t \geq 0$. Problemet lyder

$$\begin{aligned} u_t(r, t) - a(\Delta u)(r, t) &= C \quad (0 < r < R, t > 0) \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) &= 0 \quad (t > 0) \\ u(r, 0) &= 0 \quad (0 < r < R) \end{aligned} \tag{2}$$

där $u(r, t) = T(r, t) - T_0$ och $C = K/\rho c$ där ρ är densiteten (i kg/m³) och c värmekapacitiviteten (i J/kg°C) (vi får det från $Q_t + \nabla \cdot \mathbf{J} = K$ (kontinuitetsekvationen), $\mathbf{J} = -\lambda \nabla T$ (Fouriers lag) och $Q_t = c\rho T_t$ (samband mellan energidensiteten och temperatur); $a = \lambda/\rho c$ är värmediffusiviteten). Ansatsen

$$u(r, t) = \sum_n f_n(r)g_n(t)$$

ger egenfunktionerna $f_n(r)$ och egenvärdena λ_n som lösning till problemet

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) + \lambda f(r) = 0, \quad |f(0)| < \infty, \quad f(R) = 0.$$

Detta ger

$$f_n(r) = \frac{\sin(k_n r)}{r}, \quad \lambda_n = k_n^2, \quad k_n = n \frac{\pi}{R}, \quad n = 1, 2, \dots$$

g_n -problemet blir då

$$g'_n(t) + ak_n^2 g_n(t) = \frac{\int_0^R dr r^2 f_n(r) C}{\int_0^R dr r^2 f_n(r)^2} = \frac{2C}{R} \underbrace{\int_0^R dr r \sin(k_n r)}_{(-1)^{n-1} R/k_n} = \frac{(-1)^{n-1} 2C}{k_n}$$

med $g_n(0) = 0$, som har lösningen

$$g_n(t) = \frac{(-1)^{n-1} 2C}{ak_n^3} (1 - e^{-ak_n^2 t}).$$

Svar:

$$T(r, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2C}{ak_n^3} (1 - e^{-ak_n^2 t}) \frac{\sin(k_n r)}{r}, \quad k_n = n \frac{\pi}{R}.$$

Alternativlösningen (skiss): En partikulärlösning $f(r)$ till PDE och RV uppfyller

$$-a \frac{1}{r^2} (r^2 f'(r))' = C, \quad |f(0)| < \infty, \quad f(R) = T_0.$$

Detta ger

$$r^2 f'(r) = -\frac{C}{3a} r^3 \Rightarrow f'(r) = -\frac{C}{3a} r \Rightarrow f(r) = T_0 + \frac{C}{6a} (R^2 - r^2).$$

Ansatsen

$$T(r, t) = f(r) + u(r, t)$$

ger ett standard homogent PDE problem för $u(r, t)$ (med homogen PDE och homogen RV) med begynnelsevillkoret

$$u(r, 0) = T(r, 0) - f(r) = T_0 - f(r)$$

som har lösningen

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin(k_n r)}{r} e^{-ak_n^2 t}, \quad k_n = n \frac{\pi}{R},$$

$$A_n = -\frac{2}{R} \int_0^R dr r \sin(k_n r) f(r) = -\frac{C}{3aR} \frac{6R}{k_n^3} (-1)^{n-1} = \frac{2C}{ak_n^3} (-1)^n.$$

Svar:

$$T(r, t) = T_0 + \frac{C}{6a} (R^2 - r^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2C}{ak_n^3} (-1)^n \frac{\sin(k_n r)}{r} e^{-ak_n^2 t}, \quad k_n = n \frac{\pi}{R}.$$

6. Tiden T längs vägen är lika med $T = \int dt$ där $v = ds/dt$, dvs.,

$$dt = \frac{ds}{v(r)} = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}{v_0 r / R} = \frac{R}{v_0} d\theta \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2}}{r}$$

där $r' = dr/d\theta$, och

$$T[r] = \frac{R}{v_0} \int_0^{\pi/2} d\theta \underbrace{\frac{\sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}}{r(\theta)}}_{F(r(\theta), r'(\theta))}.$$

Vi skall beräkna vägen $r(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, så att $r(0) = R$, $r(\pi/2) = 2R$, och $T[r]$ är minimal.

Euler-Lagrange ekvationen till problemet kan lösas med

$$C = r' \frac{\partial F}{\partial r'} - F = \frac{1}{r \sqrt{(r')^2 + r^2}} (r')^2 - \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2}}{r} = -\frac{r}{\sqrt{(r')^2 + r^2}}$$

(första integralen pga F inte beror på θ — det är teorikunskap). Detta ger

$$C^2 = \frac{r^2}{(r')^2 + r^2} \Rightarrow C^2((r')^2 + r^2) = r^2 \Rightarrow r' = rC_2$$

där $C_2 = \pm \sqrt{1/C^2 - 1}$ är en konstant (vi byter C mot C_2). Detta ger

$$\frac{dr(\theta)}{d\theta} = C_2 r(\theta) \Rightarrow r(\theta) = C_3 e^{C_2 \theta}$$

med en annan integrationskonstant C_3 . Villkoret $r(0) = R$ ger $C_3 = R$. Villkoret $r(2\theta) = 2R$ ger

$$2R = R e^{C_2 \pi/2} \Rightarrow C_2 = \frac{2}{\pi} \ln(2).$$

Svar: $r(\theta) = R e^{\ln(2) 2\theta/\pi} = 2^{2\theta/\pi} R$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.