

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122

Torsdag 2022-10-27 kl 08:00-13:00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Fullständiga lösningar ska ges på samtliga problem
OBS: skriv endast på inlämningssidornas framsidor

Hjälpmedel Miniräknare

Examinator Mats Wallin tel 073 765 2000

1. Uppskatta havsytans höjning på grund av vattens volymexpansion om världshavens medeltemperatur höjs med en grad. Vattens volymsutvidgningskoefficient är $\alpha = 2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

2. Antag att en 100 W glödlampa genererar 95 W värme. Värmen transporteras genom glödlampans glas som antas utgöra en sfär med radie 3.0 cm och tjocklek 0.50 mm. Bestäm temperaturskillnaden mellan glasets inner och ytterytor. Glas har värmeledningsförmågan $0.80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

3. Ett värmeelement tillför effekten 350 W till 0.25 liter vatten i en kopp. Beräkna tiden för att öka vattnets temperatur från $15 \text{ }^\circ\text{C}$ till $75 \text{ }^\circ\text{C}$.

4. En skridskoåkare väger 60 kg. Isen har temperaturen $0 \text{ }^\circ\text{C}$. Antag att åkaren glider från starthastighet 7.5 m/s till stillastående och att 50% av friktionsvärmens absorberas av isen. Hur mycket is smälter?

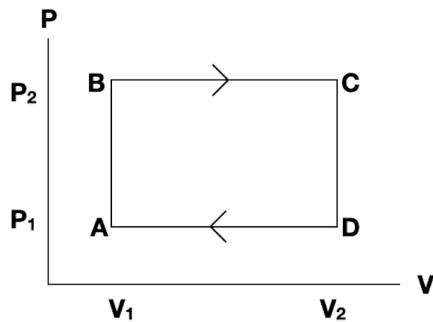
5. Använd dimensionsanalys för att konstruera ett uttryck för flödestätheten φ hos värmestrålning från en svartkropp. Antag att φ beror på kT , c och h , där T är temperaturen och k är Boltzmanns konstant, $c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ är ljushastigheten, och Plancks konstant är $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

VÄND!

6. En värmemaskin modelleras som en kretsprocess för en ideal gas som bildar en rektangel i ett PV-diagram enligt figuren.

(a) Bestäm värmeöverföringarna ΔQ_1 till motorn och ΔQ_2 från motorn uttryckt i temperaturerna T_A, T_B, T_C, T_D och värmekapaciteterna C_P, C_V

(b) Beräkna verkningsgraden hos kretsprocessen. Svaret ska uttryckas i $P_1, P_2, V_1, V_2, \gamma = C_P/C_V$.



7. Vattenmassan m med temperaturen T_1 blandas isobart och utan värmeöverföring till omgivningen med en lika stor vattenmassa m med temperaturen $T_2 \neq T_1$. Bestäm den totala entropiändringen och visa att entropin ökar.

8. Undersök derivator av Helmholtz fria energi.

(a) Visa att

$$U = -T^2 \left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T} \right)_V$$

(b) Visa att

$$C_V = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V$$

LYCKA TILL!

LÖSNINGAR

1. Uppskatta havsyttans höjning på grund av vattens volymexpansion om världshavens medeltemperatur höjs med en grad. Vattens volymsutvidgningskoefficient är $\alpha = 2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

Medeldjupet ligger mellan 1 km och 10 km som är det djupaste djupet. Antag det geometriska medelvärdet $h \approx 3 \text{ km}$ som är nära det verkliga medelvärdet. Studera en vattenpelare med basyta A , djup h och volym $V = hA$.

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}$$

ger

$$dV = \alpha V dT$$

Utvidgningen av volymen $V = Ah$ sker genom höjning av ytan med dh dvs $dV = Adh$:

$$Adh = \alpha Ah dT$$

Kancellation av A ger

$$dh = \alpha h dT = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 3000 \cdot 1 = 0.6 \text{ m}$$

Till denna effekt tillkommer även ett mindre bidrag från avsmältning av landbaserade ismassor.

2. Antag att en 100 W glödlampa genererar 95 W värme. Värmen transporteras genom glödlampans glas som antas utgöra en sfär med radie 3.0 cm och tjocklek 0.50 mm. Bestäm temperaturskillnaden mellan glasets inner och yttertor. Glas har värmeledningsförmågan $0.80 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Fouriers lag:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

där arean är $A = 4\pi R^2$. Detta ger temperaturskillnaden

$$\Delta T = -\frac{\Phi}{\lambda A} \Delta x = -\frac{95}{0.80 \cdot 4\pi \cdot (3.0 \cdot 10^{-2})^2} \cdot 0.50 \cdot 10^{-3} = -5.2 \text{ K}$$

Minustecknet betyder att utsidan av glaset är kallare än insidan.

3. Ett värmeelement tillför effekten 350 W till 0.25 liter vatten i en kopp. Beräkna tiden för att öka vattnets temperatur från 15 °C till 75 °C.

Den tillförda värmen är

$$\Delta Q = mc\Delta T = Pt$$

där c är specifika värmekapaciteten per kilo, P är effekten och t är tiden. Här behöver man inte skilja på C_V och C_P , de är nästan samma i vätskefasen. Detta ger

$$t = \frac{mc\Delta T}{P} = \frac{0.25 \cdot 4190 \cdot (75 - 15)}{350} = 180 \text{ s} = 3.0 \text{ min}$$

4. En skridskoåkare väger 60 kg. Isen har temperaturen 0 °C. Antag att åkaren glider från starthastighet 7.5 m/s till stillastående och att 50% av friktionsvärmen absorberas av isen. Hur mycket is smälter?

Rörelseenergin hos åkaren med massan M som blir till friktionsvärme är

$$E = \frac{1}{2}Mv^2$$

där v är starthastigheten. För att smälta massan m av is vid 0 °C åtgår latent värmen

$$\Delta Q = mL$$

Om hälften av friktionsvärmen blir latent smältvärme så blir ismassan som smälter

$$m = \frac{\Delta Q}{L} = 0.5 \cdot \frac{\frac{1}{2}Mv^2}{L} = 0.5 \cdot \frac{0.5 \cdot 60 \cdot 7.5^2}{333000} = 0.0025 \text{ kg} = 2.5 \text{ gram}$$

5. Använd dimensionsanalys för att konstruera ett uttryck för flödestätheten φ hos värme-strålning från en svartkropp. Antag att φ beror på kT , c och h , där T är temperaturen och k är Boltzmanns konstant, $c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s är ljushastigheten, och Plancks konstant är $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J·s.

Ansats:

$$\varphi = f(kT)^a c^b h^c$$

där f är dimensionslös. Dimensionen hos h kan avläsas ut enheten J·s:

$$[h] = [U][t] = ML^2T^{-2} \cdot T = ML^2T^{-1}$$

Nu blir

$$\begin{aligned} [\varphi] &= \left[\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} \right] = \frac{[Q]}{[A][t]} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2T} = MT^{-3} \\ &= [kT]^a [c]^b [h]^c = (ML^2T^{-2})^a (LT^{-1})^b (ML^2T^{-1})^c = M^{a+c} L^{2a+b+2c} T^{-(2a+b+c)} \end{aligned}$$

Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} a + c &= 1 \\ 2a + b + 2c &= 0 \\ 2a + b + c &= 3 \end{cases}$$

Substitution ger $c = -3$, $a = 4$, $b = -2$.

Svar:

$$\varphi = f \frac{(kT)^4}{c^2 h^3}$$

där f är en dimensionslös konstant.

Detta är Stefan-Boltzmanns lag

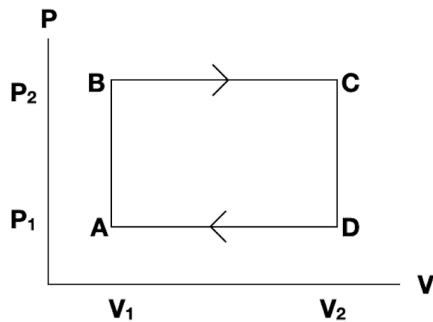
$$\varphi = \frac{2\pi^5 (kT)^4}{15c^2 h^3} = \sigma T^4$$

som konstrueras i detalj från Planckfördelningen.

6. En värmemaskin modelleras som en kretsprocess för en ideal gas som bildar en rektangel i ett PV-diagram enligt figuren.

(a) Bestäm värmeöverföringarna ΔQ_1 till motorn och ΔQ_2 från motorn uttryckt i temperaturerna T_A, T_B, T_C, T_D och värmekapaciteterna C_P, C_V

(b) Beräkna verkningsgraden hos kretsprocessen. Svaret ska uttryckas i $P_1, P_2, V_1, V_2, \gamma = C_P/C_V$.



(a) Värme ΔQ_1 tillförs i tryckhöjningen A-B och i volymsökningen B-C och ΔQ_2 bortförs i CD och DA. Beräkna värmeöverföringarna:

$$\Delta Q_1 = C_P(T_C - T_B) + C_V(T_B - T_A)$$

$$\Delta Q_2 = C_P(T_D - T_A) + C_V(T_C - T_D)$$

(b) Verkningsgrad: $PV = NkT$ ger

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_1} = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{C_P(T_C - T_B) + C_V(T_B - T_A)} = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{(C_P P_2 (V_2 - V_1) + C_V (P_2 - P_1) V_1) / Nk}$$

$C_P - C_V = Nk$ och $\gamma = C_P/C_V$ ger

$$\eta = \frac{C_P - C_V}{C_P P_2 / (P_2 - P_1) + C_V V_1 / (V_2 - V_1)} = \frac{\gamma - 1}{\gamma P_2 / (P_2 - P_1) + V_1 / (V_2 - V_1)}$$

Svar:

$$\eta = \frac{\gamma - 1}{\gamma P_2 / (P_2 - P_1) + V_1 / (V_2 - V_1)}$$

7. Vattenmassan m med temperaturen T_1 blandas isobart och utan värmeöverföring till omgivningen med en lika stor vattenmassa m med temperaturen $T_2 \neq T_1$. Bestäm den totala entropiändringen och visa att entropin ökar.

Antag att värmeöverföringen mellan vattenmassorna är reversibel, dvs sker kvasistatiskt genom utbyte med en oändlig följd reservoirer så att $dQ = TdS$ genom hela processen. Temperaturen T efter blandning ges av

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = C_P(T - T_1) + C_P(T - T_2) = 0$$

eftersom ingen värmeöverföring sker till omgivningen. Sluttemperaturen blir medelvärdet

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Beräkna entropiändringarna från värmeöverföringarna. För vattenmassan 1 blir $dQ_1 = TdS_1 = C_P dT$ vilket ger entropiändringen

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^T \frac{dQ}{T} = C_P \int_{T_1}^T \frac{dT}{T} = C_P \ln \frac{T}{T_1}$$

Pss fås

$$\Delta S_2 = C_P \ln \frac{T}{T_2}$$

Den totala entropiändringen blir

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_P \ln \frac{T}{T_1} + C_P \ln \frac{T}{T_2} = C_P \ln \frac{T^2}{T_1 T_2}$$

Kommentar: För vatten i vätskefas är $C_P \approx C_V$.

Visa att $\Delta S > 0$: Skriv $T_1 = T - \delta$, $T_2 = T + \delta$ där $\delta = (T_2 - T_1)/2$. Då blir

$$\ln \frac{T^2}{T_1 T_2} = \ln \frac{T^2}{(T - \delta)(T + \delta)} = \ln \underbrace{\frac{T^2}{T^2 - \delta^2}}_{>1} > 0$$

Alltså ökar entropin i blandningsprocessen om $T_1 \neq T_2$ dvs $\delta \neq 0$ i enlighet med termodynamikens andra lag.

Alternativ lösning:

$$\ln \frac{T^2}{T_1 T_2} = \ln \frac{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2}{4T_1 T_2} = \ln \left(1 + \frac{T_1^2 + T_2^2 - 2T_1 T_2}{4T_1 T_2} \right) = \ln \left(1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2} \right) > 0$$

8. Undersök derivator av Helmholtz fria energi.

(a) Visa att

$$U = -T^2 \left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T} \right)_V$$

(b) Visa att

$$C_V = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V$$

(a) Första lagen ger

$$dF = dU - TdS - SdT = -SdT - PdV$$

vilket betyder att

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$$

Detta ger

$$\left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V + F \left(\frac{\partial(1/T)}{\partial T} \right)_V = -\frac{S}{T} - \frac{F}{T^2} = -\frac{S}{T} - \frac{U - TS}{T^2} = -\frac{U}{T^2}$$

dvs

$$U = -T^2 \left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T} \right)_V$$

Alternativt: Mha $F = U - TS$ fås

$$\left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial(U/T - S)}{\partial T} \right)_V = -\frac{U}{T^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$$

För konstant V blir $dU = TdS$ vilket ger $(\partial U/\partial T)_V = T(\partial S/\partial T)_V$ så de två sista termerna ovan tar ut varandra. Kvar blir

$$U = -T^2 \left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T} \right)_V$$

(b) Mha $dQ = TdS$ och $S = -(\partial F/\partial T)_V$ blir

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V$$

Alternativt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V &= \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial(U - TS)}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} - T \frac{\partial S}{\partial T} - S \right) \right)_V \\ &= - \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = -\frac{C_V}{T} \end{aligned}$$