

Lösningsförslag till Tentamen i Modern Fysik (SH1014)

08.00-13.00, 2021-01-15, KTH, Stockholm

Betygskriterierna är följande:

A:36-40, B:32-35.5, C:28-31.5, D:24-27.5, E:20-23.5, Fx:18-19.5, F:0-17.5

1. Problem:

En väteatom har precis bildats genom elektroninfångning av en proton och skickar i processen ut en foton med våglängd 91.16 nm.

a) Vilket tillstånd hamnar väteatomen i?

Utgå från formelsamlingens uttryck för väteatomens vågfunktioner och

b) beräkna den mest sannolika radien för tillståndet, uttryckt i a_0 .

c) Beräkna även väntevärdet för radien, $\langle r \rangle$, uttryckt i a_0 .

Följande integral kan vara användbar: $\int_0^\infty r^m e^{-br} dr = \frac{m!}{b^{m+1}}$.

Lösning:

a) Då väteatomen bildas emitteras en foton med våglängd $\lambda = 91.16$ nm. Vi använder relationen mellan energi och våglängd för fotoner: $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1239.8}{\lambda} [eV nm] = 13.60$ eV.

Då detta är grundtillståndets bindningsenergi måste väteatomen ha bildats i grundtillståndet direkt.

b)

$$P(r) = 4\pi r^2 |\Psi_{1,0,0}|^2 = 4\pi r^2 \frac{1}{4\pi} \frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

Maximum av $P(r)$ får genom derivering:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= 0 \\ \frac{4}{a_0^3} \left(2r e^{-2r/a_0} - \frac{2}{a_0} r^2 e^{-2r/a_0} \right) &= 0 \\ r - \frac{r^2}{a_0} &= 0 \\ r &= a_0. \end{aligned}$$

Den mest sannolika radien är alltså a_0 , dvs Bohrradien.

c) Väntevärdet för radien, $\langle r \rangle$, räknas ut på sedvanligt sätt:

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_0^\infty \Psi^* r \Psi dV = \\ \int_0^\infty r \left(\sqrt{\frac{1}{4\pi}} \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \right)^2 dV &= [dV = 4\pi r^2 dr] = \\ \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-2r/a_0} dr. \end{aligned}$$

Efter att ha löst integralen får vi slutligen:

$$\langle r \rangle = \frac{3a_0}{2}.$$

2. Problem:

En partikel med massan m är bunden i en endimensionell potential, $U(x)$. Partikelns vågfunktion kan skrivas:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax^3 e^{-ax} & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Normera vågfunktionen, dvs bestäm konstanten A .
- b) Bestäm potentialen $U(x)$.
- c) Bestäm partikelns energi E .

Lösning:

a) Normering av vågfunktionen ger oss konstanten A genom:

$$1 = A^2 \int_0^\infty x^6 e^{-2ax} dx = \frac{A^2 6!}{(2a)^7}. \text{ Vi får alltså att } A = \sqrt{\frac{128a^7}{720}} = \sqrt{\frac{8a^7}{45}}.$$

b) Vi söker potentialen $U(x)$ vilken vi kan identifiera om vi stoppar in $\psi(x)$ i Schrödingerekvationen. Vi börjar med att bestämma vad andraderivatan av $\psi(x)$ blir:

$$\psi(x)'' = A [6xe^{-ax} - 6ax^2e^{-ax} + a^2x^3e^{-ax}] = Ax^3e^{-ax} \left[\frac{6}{x^2} - \frac{6a}{x} + a^2 \right] = \psi(x) \left[\frac{6}{x^2} - \frac{6a}{x} + a^2 \right]$$

I S.E. blir detta:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi(x) \left[\frac{6}{x^2} - \frac{6a}{x} + a^2 \right] + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Här ser vi att vi kan stryka bort vågfunktionen och identifiera termer som beror på x som tillhörande potentialen (samt identifiera resten som energin):

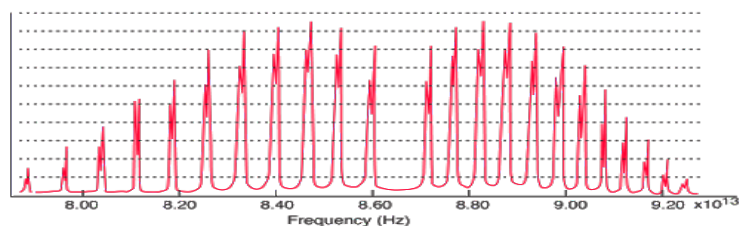
$$U(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6}{x^2} - \frac{6a}{x} + a^2 \right)$$

c) På samma sätt från ovanstående: $E = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}$

3. Problem:

Nedan visas ett absorptionsspektrum för vibration- och rotationsövergångar i den diatomära molekylen HCl.

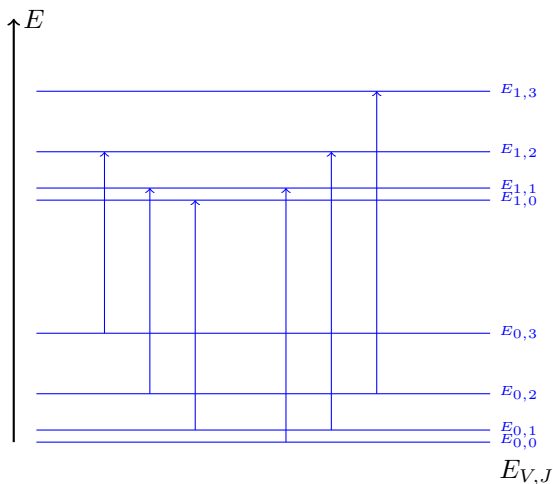
- a) Visa med en figur (energinivåer och övergångar) hur spektrumet uppkommer och beskriv kortfattat vilken roll urvalsreglerna spelar.
- b) Bestäm m.h.a. spektrumet fjäderkonstanten för HCl-molekylen.
- c) Bestäm m.h.a. spektrumet medelavståndet mellan atomerna i molekylen.



Medelmassan för Cl-atomer är 35.453 u och för H-atomer är det 1.008 u.

Lösning:

a)



Vi får möjliga absorptionsövergångar enligt figuren. Urvalsreglerna, som baseras på bevarande av rörelsemängdsmoment under processen att emittera en foton (med spinn-1) är att $\Delta J = \pm 1$, samt att elektromagnetisk strålning genereras eller absorberas som mest effektivt av elektriska dipoler, och detta uppfylls endast då vibrationskvanttalet ändras med 1, alltså $\Delta V = \pm 1$.

b) Fjäderkonstanten ingår i uttrycket för vibrationskvantiseringen $E_{\text{vib}} = (V + \frac{1}{2}) \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}}$; $V = 0, 1, 2, 3, \dots$, där den effektiva massan är $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ och k är fjäderkonstanten.

Själva övergången ges av skillnaden mellan två vibrationstillstånd där $\Delta V = \pm 1$. Det spelar alltså ingen roll vilket vibrationstillstånd molekylen befinner sig i när den absorberar en foton, eftersom den går upp precis ett steg i vibrationskvanttal. Energiskillnaden mellan två vibrationsnivåer (med samma rotationskvanttal J) är:

$$\Delta E_{\text{vib}} = \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}} \left((V + \frac{1}{2}) - (V - \frac{1}{2}) \right) = \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}}. \text{ Vi vet också att } E = h\nu = 2\pi \hbar \nu.$$

Eftersom $\Delta J \pm 1$ så är övergången från $(V, J) \rightarrow (V+1, J)$ förbjuden. Detta ger upphov till en till synes avsaknad topp i spektrumet. Den förbjudna övergångens frekvens eller energi karakteriserar dock precis energiskillnaden mellan två vibrationstillstånd och är alltså den vi behöver för att hitta fjäderkonstanten.

$$\text{Om vi löser ut fjäderkonstanten får vi } k = \frac{\mu \Delta E_{\text{vib}}^2}{\hbar^2} = \frac{4\pi^2 m_1 m_2 \nu^2}{m_1 + m_2}.$$

Om vi läser ut den förbjudna övergångens frekvens ur spektrumet ser den ut att ligga vid ca $8.65 \cdot 10^{13}$ Hz. Detta instoppat ovan, tillsammans med massorna för väte och klor, ger oss att $k = 482$ N/m.

c) Hela absorptionsspektrumet byggs upp av övergångar mellan vibrations- och rotationstillstånd (V, J) enligt schemat i a). Energin för de absorberade fotonerna kan enkelt visas bli

$$E_\gamma = \Delta E(\Delta V = \pm 1, \Delta J = \pm 1) = \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}} \pm m \frac{\hbar^2}{I} = \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}} \pm m \frac{\hbar^2}{\mu a^2} \text{ där } m = 1, 2, 3, \dots$$

(det kvadratiske beroendet på J och faktorn 2 i nämnaren försvinner p.g.a. urvalsregeln $\Delta J = \pm 1$)

Detta innebär att avståndet mellan två toppar i absorptionsspektrumet bestäms av $\Delta E_\gamma = \frac{\hbar^2}{\mu a^2}$. För gapet i mitten så blir det $\Delta E_{\gamma \text{ gap}} = \frac{2\hbar^2}{\mu a^2}$ pga den förbjudna övergången i mitten. Från spektrumet kan vi avläsa frekvensskillnaden mellan två absorptionslinjer på olika sätt. Vi kan uppskatta skillnaden mellan två valda linjer, eller välja ett intervall och ta medelskillnaden. Oavsett sätt kommer vi landa på ett $\Delta \nu$ på ungefär $6 \cdot 10^{11}$ Hz. Vi kan nu lösa ut medelavståndet a ur ekvationen ovan och skriva uttrycket i termer av frekvensskillnad $\Delta \nu$ som

$$a = \sqrt{\frac{\hbar(m_1 + m_2)}{2\pi m_1 m_2 \Delta \nu}} = 1.3 \text{ Å}.$$

4. Problem:

Fysikern Prof. Mats Plonk utför i början på 1900-talet mätningar av den fotoelektriska effekten. Hans mätupställning är inte så fint intrimmad, så resultaten blir inte lika bra som de från andra, mer kända, samtida fysiker. Prof. Plonk låter monokromatiskt ultraviolett ljus med våglängderna $\lambda_1=352.94$ nm, $\lambda_2=294.12$ nm, $\lambda_3=254.24$ nm, falla in mot en metallyta. Elektroner som emitteras från ytan har de maximala energierna $E_{\max,1}=2.055$ eV, $E_{\max,2}=2.922$ eV, $E_{\max,3}=3.738$ eV. Hjälp Prof. Plonk använda dessa data för att bestämma (Plonks värde på) Plancks konstant, h (enhet eVs), och utträdelsearbetet, W (enhet eV), för metallen i fråga.

Lösning:

Fotoelektrisk effekt då en lågenergetisk foton faller in mot en metallyta kan beskrivas med följande uttryck:

$$E_{\max} = h\nu - W,$$

där h är Plancks konstant och W är utträdelsearbetet. I denna uppgift så använder vi samma formalism, men ersätter h med Ploncks konstant, h^* , och W med W^* .

I ett ν -mot- $E_{\max}$ -diagram (frekvensen ν på x -axeln) så borde data-punkterna lägga sig längs en linje. Då motsvarar h^* linjens lutning och $-W^*$ positionen där kurvan skär $E_{\max}$ -axeln.

Frekvensen för fotonerna fås enligt $\nu = c/\lambda$:

och deras energi av Vi testar att använda första och sista data-punkten för lutningen, h^*

$$h^* = \frac{\Delta E_{\max}}{\Delta \nu} = \frac{E_3 - E_1}{\nu_3 - \nu_1} = \frac{E_3 - E_1}{\frac{c}{\lambda_3} - \frac{c}{\lambda_1}} = \dots = 5.10 \cdot 10^{-15} [\text{eVs}].$$

Vi kan sedan testa andra kombinationer (3 vs 2, 1 vs 2) och kommer då att se att vi får nästan exakt samma värde på h^* . Punkterna ligger således på en linje. För att få W^* så kan vi nu använda punkten (λ_3, E_3):

$$W^* = \frac{h^* c}{\lambda_3} - E_{\max,3} = 2.28 [\text{eV}].$$

(Linjär regression för att få h^* och W^* samtidigt från all data är förstås bra för att minimera felet, men krävs inte i denna uppgift och förändrar inte resultatet nämnvärt i detta fall).

5. Problem:

Ett exempel på en radioisotop med extremt lågaktivt alfa-sönderfall är ^{209}Bi , med halveringstiden $1.9 \cdot 10^{19}$ år, dvs många storleksordningar längre än universums ålder. Alfäsönderfall från denna vismuth-isotop detekterades första gången år 2003.

a) Vilken är dotterkärnan då ^{209}Bi sönderfaller?

b) Bestäm Q -värdet (i enheten MeV) för alfäsönderfallet av ^{209}Bi .

c) Bestäm den kinetiska energin (i enheten MeV) hos alfa-partikeln.

Lösning:

a) Från det periodiska systemet så ser vi att vismut (Bi) har atomtalet (= protontalet): $Z = 83$. Bi-209 har masstalet $A = 209$ (och således neutrontalet $N = 209 - 83 = 126$). Vid alfäsönderfall så får dotterkärnan en minskning av 2 protoner och 2 neutroner, dvs masstalet minskar med 4. Dotterkärnan får alltså: $A = 209 - 4 = 205$, $Z = 83 - 2 = 81$. Vi ser att detta protontal motsvarar grundämnet tallium (Tl). Dotterkärnan är talliumisotopen ^{205}Tl .

b) Q -värdet motsvarar skillanden i vilomassa före och efter sönderfallet:

$$Q = \Delta c^2 = [M(^{209}\text{Bi}) - (M(^{205}\text{Tl}) + M(^4\text{He}))] c^2 = 0.0033680[u] \cdot 931.502[\text{MeV}/c^2] c^2 = 3.137 [\text{MeV}],$$

där vi använt *atommassor*.

c) Vi noterar att $Q \ll m_\alpha c^2$ och ser att vi kan räkna med klassiska formler. Vi sönderfallet så övergår energi motsvarande Q till rörelseenergi till alfapartikeln och dotterkärnan (de rör sig i motsatt riktning). Rörelseenergin och rörelsemängden ska bevaras samtidigt vilket ger $Q = E_\alpha + E_R = m_\alpha v^2/2 + m_R v_R^2/2$ och $m_R v_R = m_\alpha v_\alpha$, där m_R och v_R är dotterkärnans massa och hastighet. Lite algebra ger sambandet:

$$E_\alpha = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_R}} \approx \frac{Q}{1 + \frac{4}{205}} = \dots = 3.077 [\text{MeV}].$$

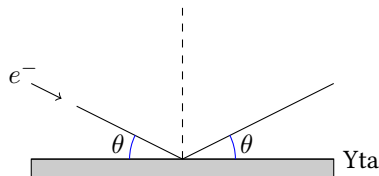
Vi ser att huvuddelen av energin går till alfapartikeln.

6. Problem:

Robin har hittat en gammal experimentlåda som använts till demonstrationer i modern fysik. Instruktioner och informationen till delarna är dock mycket bristfällig. Där finns ett litet elektronrör med trasig visare och en detektorskärm, ett informationsblad samt en rostig och en blank metallbit. På bladet står det att metallerna järn ($1.43 \text{ \AA}$), volfram ($1.59 \text{ \AA}$) och vanadin ($1.52 \text{ \AA}$) skulle finnas där (samt deras gitterplanavstånd längs ytnormalen). Robin ser enkelt vilken bit som är av järn och putsar upp den. Den andra biten är alltså volfram eller vanadin och Robin vill veta vilken det är. När elektronröret ställs på sin maximala energi och elektroner sprids mot järnbiten syns ett första maximum vid vinkeln $\theta_{\text{Fe}} = 73^\circ$ enligt figur nedan. När elektronerna istället sprids mot den okända biten uppstår ett intensitetsmaximum vid $\theta_x = 60^\circ$.

a) Bestäm den maximala kinetiska energi som elektronerna ges av elektronröret. [3 p]

b) Avgör genom beräkning om den okända metallbiten är av volfram eller vanadin. [2 p]



Lösning:

a) Vi vet att elektroner kan spridas som vågor och att positiv interferens inträder då våglängdskillnaden är $n\lambda$. Detta leder oss till Braggs lag: $n\lambda = 2d\sin\theta$, där d är avståndet mellan planen längs normalen och θ är vinkeln angiven ovan. Vi vet för övrigt att våglängden för en elektron, enligt de Broglie, är $\lambda = h/p = h/\sqrt{2mE_k}$, för icke-relativistiska elektroner med massa m och kinetisk energi E_k . Eftersom visaren är trasig men utrustningen ändå har ett maxutslag så kan denna energi användas som referens. Det första maximum bör inträda för $n = 1$. Vi bryter ut E_k ur Bragg och får att:

$$E_k = \frac{h^2}{8md^2\sin^2\theta}$$

Med instoppade värden för Fe ($d_{\text{Fe}} = 1.43 \text{ \AA}$, $\theta_{\text{Fe}} = 73^\circ$) får vi att $E_k^{\text{max}} = 20.1 \text{ eV}$.

b) Vi kan antingen använda ovan uttryck och se om den kinetiska energin för att få fram $\theta = 60^\circ$ vid de två olika avstånden d för V eller W ligger under E_k^{max} , eller använda Braggs lag direkt för att se vilket avstånd som ges av vinkeln $\theta = 60^\circ$:

$$d = \frac{h}{2\sin\theta\sqrt{2mE_k}} = 1.58 \text{ \AA}.$$

Vi ser att detta är klart närmast värdet för wolfram (W) och kan därmed utesluta vanadin (V).

7. Problem:

Vid många partikelfysik-experiment är det viktigt att förstå hur en sönderfallande partikels räckvidd i labbsystemet påverkas av dess kinetiska energi. Detta påverkar andelen detekterade partiklar i en detektor på ett visst avstånd från strålmålet där partikeln skapas. I detta exempel så tänker vi oss en partikel X, med vilomassa $1.85 \text{ GeV}/c^2$, som (i sitt eget vilosystem) har halveringstiden, $t_{1/2} = 5.5 \cdot 10^{-12} \text{ s}$.

Under ett experiment på CERN så skapas många miljoner sådana X-partiklar i en väldefinierad punkt i strålmålet, färdas i positiva x -riktningen, och sönderfaller i flykten. Experimentet är designat så att varje X-partikel får en kinetisk energi på 35 GeV .

På ett visst avstånd, d , från strålmålet, så har en detektor placerats. Om en X-partikel når detektorn innan den sönderfaller så detekteras den. För att experimentet ska lyckas så behöver man detektera 5% av X-partiklarna.

a) I en X-partikels vilosystem, hur lång är tiden (efter att partikeln skapats i strålmålet) tills det är 5% sannolikhet att partikeln finns kvar?

b) Beräkna avståndet, d , (i labbsystemet) mellan strålmålet och detektorn för att 5% av X-partiklarna ska detekteras.

Lösning:

a) Vi använder den vanliga formeln för radioaktivt sönderfall:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = I_0 e^{-t \ln 2 / t_{1/2}}$$

Tiden då sannolikhet är 5% att partikeln är kvar motsvaras i formeln av att $N/N_0 = 0.05$:

$$0.05 = e^{-\lambda t} = I_0 e^{-t \ln 2 / t_{1/2}}$$

$$t = \frac{t_{1/2} \ln(0.05)}{-\ln 2} = 23.77 \text{ ps.}$$

b) Vi har $E_0 = 1.85 \text{ GeV}$ och $E_k = 35 \text{ GeV}$. Vi börjar med att räkna ut γ -faktorn:

$$E_k = E_0(1 - \gamma)$$

$$\gamma = \frac{E_k}{E_0} + 1 = 19.92.$$

Tidsdilatation ger tiden (till dess att 5% är kvar) i labsystemet:

$$t_{\text{lab}} = \gamma t = 19.92 \cdot 23.77 \text{ ps} = 473.48 \text{ ps}$$

vi har $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ och får $v/c = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} = 0.99874$. Avståndet till detektorn blir då $d = vt_{\text{lab}} = 0.14 \text{ m}$.

8. Problem:

Vid proton-proton-kollisioner så kan positivt laddade pioner, π^+ , skapas med följande reaktion:

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+.$$

Denna reaktion kan utföras symmetriskt (en proton från varje håll) eller asymmetriskt med ett stillastående proton-strålmål.

a) Vid en symmetrisk proton-proton-kollision (där vi alltså befinner oss i systemets masscentrum, betecknat med index cm) så kommer de två protonerna in från rakt motsatta håll med samma hastighet, v_{cm} . Vardera proton har den kinetiska energin $E_{k,cm}$ före kollisionen. Beräkna det lägsta värde på $E_{k,cm}$ för vilket reaktionen är möjlig. Ange svaret i enheten MeV.

b) Vid en asymmetrisk proton-proton-kollision så är en proton stillastående i labbsystemet och vi har en inkommande proton med hastigheten v_p relativt labbsystemet. Vilket hastighet (uttryckt i kvoten v_p/c) behöver protonen ha för att reaktionen ovan ska vara möjlig?

Lösning:

a) I masscentrumsystemet så bevaras den totala relativistiska energin, E_{cm} . Två protoner kommer från varsitt håll, vardera med $E_{k,cm}$. Vi betraktar fallet där $E_{k,cm}$ är precis tillräcklig för att reaktionen ska ske. I cm -systemet så är rörelsemängden 0 och således så är de tre partiklarna i vila efter reaktionen. Den totala relativistiska energin, E_{cm} , ska bevaras i cm -systemet. Vi har: $E_{cm,fore} = 2E_{k,cm} + 2m_p c^2$ och $E_{cm,after} = (m_p + m_n + m_{\pi^+})c^2$:

$$2E_{k,cm} + 2m_p c^2 = (m_p + m_n + m_{\pi^+})c^2$$

$$E_{k,cm} = \frac{(m_n + m_{\pi^+} - m_p)c^2}{2} = 70.4 \text{ MeV}$$

b) Från uttrycket för γ så kan först ta fram: $v/c = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$. Vi börjar sedan med att räkna ut hastigheten, v_{cm} i cm -systemet (för den inkommande protonen) med hjälp av den kinetiska energin.

$$E_{k,cm} = m_p c^2 (\gamma - 1)$$

$$\gamma = \frac{E_{k,cm}}{m_p c^2} + 1$$

$$\frac{v_{cm}}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_{k,cm}}{m_p c^2} + 1\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{70.4}{938.28} + 1\right)^2}} = 0.367.$$

Vi vill nu transformera denna hastighet till labsystemet. Lämpligen används Loretztransformation av hastigheter till detta. Vi har:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$

Vi inser att hastigheten v , dvs den mellan lab-systemet och cm-systemet är v_{cm} . Dessutom så är hastigheten på den inkommande protonen i cm-systemet också v_{cm} , dvs $u'_x = v_{\text{cm}}$. Detta ger:

$$\frac{v_{\text{lab}}}{c} = \frac{2 \frac{v_{\text{cm}}}{c}}{1 + \left(\frac{v_{\text{cm}}}{c}\right)^2} = \frac{2 \cdot 0.367}{1 + 0.367^2} = 0.65.$$

(Problemet kan även lösas på andra sätt, t.ex. m.h.a. det invarianta uttrycket $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$.)