



**SF1672 Linjär algebra**  
**Exempeltentamen**  
**12 Januari 2021**

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Katharina Jochemko

Tentamen består av åtta uppgifter. Del I utgörs av de fem första uppgifterna (Uppgift 1 - 5) som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Varje uppgift i del I ger 4 poäng. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna (Uppgift 6 - 8) och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift i del II ger 6 poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna och quizzarna adderas till erhållna poäng på del I. (Bonuspoäng räknas bara under samma läsår.) Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

| Del      | Poäng | Innehåll              | Fx | E  | D  | C  | B  | A  |
|----------|-------|-----------------------|----|----|----|----|----|----|
| I (1-5)  | 20    | Grundläggande problem | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| II (6-8) | 18    | Avancerade problem    | 0  | 0  | 4  | 8  | 11 | 14 |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden ska inte få full poäng.

---

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Givet planet

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 49\}$$

Bestäm avståndet mellan planet  $H$  och punkten  $P = (4, 6, 12)$ . (4 p)

2. Givet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm rangen, rank  $A$ , av  $A$  och en bas till nollrummet,  $\text{Nul } A$ , av  $A$ . (4 p)

3. Givet matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en ortogonal matris  $P$  och en diagonalmatris  $D$  sådana att  $D = P^T A P$ . (4 p)  
(1 poäng av 4 poäng ges för att visa att egenvärdena av  $A$  är 1 och 3.)

4. Låt  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (2, 1)$ ,  $P_3 = (0, 1)$  och  $P_4 = (2, 2)$  vara hörnen av en parallelogram  $\Pi \subset \mathbb{R}^2$  och låt  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara den linjära avbildningen som ges av

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm arean,  $\text{area}(T(\Pi))$ , av bilden av  $\Pi$  under avbildningen  $T$ . **(4 p)**

5. Givet

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en minstakvadratlösning till systemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . **(4 p)**

---

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

vara en given matris och låt avbildningen  $T$  ges av

$$T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ X \mapsto AX.$$

(i) Visa att  $T$  är en linjär avbildning. **(2 p)**

(ii) Låt  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$  vara en bas av  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  som ges av

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm  $\mathcal{B}$ -matrisen  $[T]_{\mathcal{B}}$  för avbildningen  $T$ . **(4 p)**

7. Låt  $\mathbb{P}_2 = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$  vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med en inre produkt definierad som

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

för alla  $p(t), q(t) \in \mathbb{P}_2$ . Låt  $W = \text{span}\{t^2 - 1\}$  vara delrummet av  $\mathbb{P}_2$  som spänns upp av polynomet  $t^2 - 1$ . Bestäm en ortonormal bas för det ortogonala komplementet  $W^\perp$ . **(6 p)**

8. En kvadratisk matris  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  kallas *strikt övertriangulär* om  $a_{ij} = 0$  för alla  $i \geq j$ .

(i) Visa att endast nollmatrisen är både strikt övertriangulär och diagonaliserbar. **(3 p)**

(ii) Visa att en strikt övertriangulär  $n \times n$  matris,  $A$ , uppfyller att  $A^n = 0$ . **(3 p)**

---