

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122

Torsdag 2021-10-28 kl 08:00-13:00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga

Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag

Fullständiga lösningar ska ges på samtliga problem

OBS: skriv endast på inlämningssidornas framsidor

Hjälpmedel

Miniräknare

Examinator

Mats Wallin tel 073 765 2000

1. En påse som innehåller 5 kg blykuler släpps från 7.0 meters höjd och träffar marken som antas vara av ett hårt material som inte deformeras av träffen. Bly har specifik värmekapacitet $c = 0.129 \text{ J/gram}\cdot\text{K}$ och atommassan $207.2u$. Beräkna temperaturhöjningen i blyet.

2. En vätska flödar genom ett långt cylinderformat rör med diameter d . Vätskans flödes-hastighet är v och densiteten är ρ . Använd dimensionsanalys för att bestämma ett uttryck för tryckändringen per längdenhet dP/dx i vätskeflödet.

3. 1.00 mol CO_2 vid temperaturen 373 K har volymen $0.536 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ vid 50.0 atm tryck. CO_2 har Van der Waals-parametrar $a_0 = 0.364 \text{ m}^6 \cdot \text{Pa/mol}^2$ och $b_0 = 0.0428 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$. Vad blir trycket beräknat med Van der Waals-ekvationen? Svaret ska ges i atm.

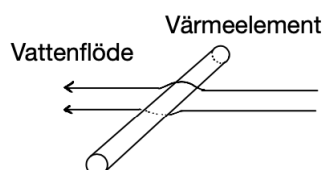
4. 3.0 liter monoatomär ideal gas vid trycket 1.0 atm genomgår en isobar process som startar vid $T = 300 \text{ K}$ och slutar vid $T = 1000 \text{ K}$. Beräkna ändringen i:

(a) inre energi.

(b) entalpi.

(c) entropi.

5. Ett värmeelement består av en cylinder med diameter 3.0 cm och längd 0.50 m. Värmeelementet är nedsänkt i vatten som passerar i rät vinkel mot cylinderaxeln (se figuren). Vatten med temperaturen $25.0 \text{ }^\circ\text{C}$ passerar förbi värmeelementet med hastigheten 1.0 m/s. Vid effekten 30.0 W blir värmeelementets yttemperatur $60.0 \text{ }^\circ\text{C}$. Beräkna värmeöverföringskoefficienten. Vad är betydelsen av vattnets hastighet för processen?



VÄND!

6. En eldkolv består av en glascylinder och en kolv med gummitätning. Kolven trycks snabbt in i cylindern varpå en bit bomull i cylindern antänds. Antändningstemperaturen för bomull är ca 400 °C. Med vilken faktor behöver luften i cylindern komprimeras för att antändningstemperaturen ska uppnås om rumstemperaturen är 20 °C?

7. En byggnad med inomhustemperaturen T värms upp av en ideal värmepump med effekten $\Delta W/\Delta t$ där Δt är tiden för en cykel. Värmeflödet ut ur byggnaden är $K(T - T_0)$ där K är en konstant och T_0 är utomhustemperaturen. Bestäm ett uttryck för temperaturen T vid steady state.

8. Ett antal Carnotmaskiner är hopkopplade. Maskin 1 absorberar värme ΔQ_1 från reservoir 1 som har temperatur T_1 och avger värme ΔQ_2 till reservoir 2 med temperatur T_2 . Maskin 2 absorberar värmen ΔQ_2 från reservoir 2 och avger värmen ΔQ_3 till reservoir 3 som har temperaturen T_3 , osv. Maskin $n = 1, 2, 3, \dots$ absorberar värmen ΔQ_n vid T_n och avger värmen ΔQ_{n+1} vid T_{n+1} . Antag att maskin n levererar en konstant faktor r av arbetet hos maskin $n - 1$: $\Delta W_n/\Delta W_{n-1} = r$. Beräkna temperaturskillnaden $T_n - T_{n+1}$ uttryckt i T_1, T_2, r och n .

LYCKA TILL!

FORMELBLAD I TERMODYNAMIK

Boltzmanns konstant	$k = 1.380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Gaskonstanten	$R = N_A k = 8.314 \text{ J/(K mol)}$
Avogadros konstant	$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$
Atomära massenheten	$u = 1.660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Plancks konstant	$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Ljushastigheten	$c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Atmosfärstryck	$1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$
Atommassor m/u	H: 1, He: 4, C: 12, N: 14, O: 16, Ar: 40
Luft	ca 80% N ₂ och 20% O ₂
Stefan-Boltzmanns konstant	$\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$
Solarkonstanten	$\varphi = 1.4 \text{ kW/m}^2$
Värmekapacitet för vatten vid 15°C	$c = 4.19 \text{ kJ/K kg}$
Förångningsentalpi vatten 100°C, 1 atm	2260 kJ/kg
Värmekapacitet för is vid -4 °C	$c = 2.2 \text{ kJ/K kg}$
Smältentalpi för is	333 kJ/kg
Pris för hushållsel inklusive skatt	1 kr/kWh
Människa effekt: vila/promenad/löpning	1/2/5 W/kg
Cirkelns omkrets och area	$2\pi R$ och πR^2
Sfärens area och volym	$4\pi R^2$ och $4\pi R^3/3$
Logaritmer	$\ln ab = \ln a + \ln b, \ln a/b = \ln a - \ln b$ $d \ln x / dx = 1/x, \int 1/x dx = \ln x$ $x = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$
Lösningar till $x^2 + px + q = 0$	
Kinetisk energi	$E_K = \frac{1}{2}mv^2$
Gravitationell potentiell energi	$E_P = mgh, g = 9.8 \text{ m/s}^2$
Effekt=energi per tidsenhet	dE/dt
Tryck	$P = F/A$
Arbete	$dW = -PdV$
Ideal gas	$PV = NkT = nRT$
Monoatomär ideal gas	$U = \frac{3}{2}NkT$
Diatomär ideal gas	$U = \frac{5}{2}NkT$
Van der Waals tillståndsekvation	$P = NkT/(V - Nb) - a(N/V)^2$
Van der Waals tillståndsekvation 1 mol	$(P + a_0/v^2)(v - b_0) = RT, a_0 = aN_A^2, b_0 = bN_A$
Isoterm kompressibilitet	$\kappa = -(1/V)(\partial V/\partial P)_T$
Isobar volymutvidgningskoefficient	$\alpha_V = (1/V)(\partial V/\partial T)_P$
Boltzmannfördelningen	$n_i = \text{konstant} \cdot \exp(-E_i/kT)$
Maxwell-Boltzmanns hastighetsfördelning	$f^3(v) = 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2}v^2 \exp(-mv^2/2kT)$
MB fördelning av hastighetskomponent	$f^1(v_x) = \sqrt{m/2\pi kT} \exp(-mv_x^2/2kT)$
Medelhastighet	$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/m\pi}$
Medelkvadrathastighet	$\langle v^2 \rangle = 3kT/m$
Mest sannolika hastighet	$v_p = \sqrt{2kT/m}$
Kollisionstid	$\tau = 1/(n\pi d^2\sqrt{2}\langle v \rangle)$
Medelfri väg	$l = \langle v \rangle \tau = 1/(n\pi d^2\sqrt{2})$
Stöttal	$\nu = P/\sqrt{2\pi mkT}$

Värmefflöde	$\Phi = dQ/dt$
Värmefflödestäthet	$\varphi = \Phi/A$
Fouriers lag	$\Phi = -\lambda A \Delta T / \Delta x$
Konvektion	$\Phi = \alpha A (T_1 - T_2)$
Värmeöverföring genom vägg	$\Phi = U A \Delta T$
U-värde	$1/U = 1/\alpha + \Delta x/\lambda$
Plancks strålningslag	$u(f, T) = (8\pi h f^3 / c^3) / [\exp(hf/kT) - 1]$
Wiens förskjutningslag	$hf_{\max}/kT = 2.821$, $T\lambda_{\max} = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
Stefan-Boltzmanns lag	$\varphi = \sigma T^4$
Nettoflöde:	$\Phi = A\varepsilon\sigma(T^4 - T_0^4)$
Första lagen	$dU = dQ + dW$
Isokor värmekapacitet	$C_V = (\partial Q / \partial T)_V$
Isobar värmekapacitet	$C_P = (\partial Q / \partial T)_P$
Monoatomär ideal gas:	$C_V = \frac{3}{2}Nk, C_P = \frac{5}{2}Nk = C_V + Nk$
En mol ideal gas	$c_P = c_V + R$
Adiabat	$PV^\gamma = \text{konstant}, \gamma = C_P/C_V$
Adiabat	$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}, TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{konstant}$
Adiabatiskt arbete	$W = (P_2V_2 - P_1V_1)/(\gamma - 1)$
Verkningsgrad värmemaskin	$\eta = \Delta W /\Delta Q_1$
Carnotprocess	$\eta = 1 - T_2/T_1, \Delta Q_1/T_1 = \Delta Q_2/T_2$
Kylfaktor	$\varepsilon = \Delta Q_2/\Delta W$
Värmefaktor	$\varepsilon_v = \Delta Q_1/\Delta W$
Entropi	$S = k \ln \Omega$
Reversibel värmeöverföring	$dQ = TdS$
Irreversibel värmeöverföring	$dQ < TdS$
Entalpi	$H = U + PV$
Helmholtz fria energi	$F = U - TS$
Gibbs fria energi	$G = F + PV$

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122 211028

LÖSNING

1. En påse som innehåller 5 kg blykolor släpps från 7.0 meters höjd och träffar marken som antas vara av ett hårt material som inte deformeras av träffen. Bly har specifik värmekapacitet $c = 0.129 \text{ J/gram}\cdot\text{K}$ och atommassan $207.2u$. Beräkna temperaturhöjningen i blyet.

Antag att all kinetisk energi blir till värme i blykulorna:

$$\Delta Q = Mc\Delta T = Mgh$$

ger

$$\Delta T = \frac{gh}{c} = \frac{9.8 \cdot 7.0}{129} = 0.5 \text{ K}$$

SVAR: 0.5 K

Notera att blyets massa inte ingår i lösningen.

2. En vätska flödar genom ett långt cylinderformat rör med diameter d . Vätskans flödes-hastighet är v och densiteten är ρ . Använd dimensionsanalys för att bestämma ett uttryck för tryckändringen per längdenhet dP/dx i vätskeflödet.

Ansats:

$$\frac{dP}{dx} \propto d^a v^b \rho^c$$

Dimensionsanalys:

$$\begin{aligned} [dP/dx] &= [F/V] = [ma/V] = MLT^{-2}L^{-3} = ML^{-2}T^{-2} \\ &= [d^a v^b \rho^c] = [d]^a [v]^b [\rho]^c = L^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c = M^c L^{a+b-3c} T^{-b} \end{aligned}$$

Identifiera exponenterna:

$$c = 1, b = 2, a = -1$$

SVAR:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{v^2 \rho}{d} f$$

där f är en dimensionslös kvantitet.

Kommentar: En mer detaljerad analys visar att f innehåller vätskans viskositet η .

3. 1.00 mol CO₂ vid temperaturen 373 K har volymen $0.536 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ vid 50.0 atm tryck. CO₂ har Van der Waals-parametrar $a_0 = 0.364 \text{ m}^6 \cdot \text{Pa}/\text{mol}^2$ och $b_0 = 0.0428 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$. Vad blir trycket beräknat med Van der Waals-ekvationen? Svaret ska ges i atm.

$$(P + a_0/v^2)(v - b_0) = RT$$

$$P = \frac{RT}{v - b_0} - \frac{a_0}{v^2} = \frac{8.314 \cdot 373}{0.536 \cdot 10^{-3} - 0.0428 \cdot 10^{-3}} - \frac{0.364}{(0.536 \cdot 10^{-3})^2} = 5.021 \text{ MPa} = 49.6 \text{ atm}$$

SVAR: 49.6 atm

4. 3.0 liter monoatomär ideal gas vid trycket 1.0 atm genomgår en isobar process som startar vid $T = 300$ K och slutar vid $T = 1000$ K. Beräkna ändringen i:

(a) inre energi.

(b) entalpi.

(c) entropi.

3.0 liter luft vid $P = 1.0$ atm, $T_1 = 300$ K har

$$Nk = \frac{PV_1}{T_1} = \frac{101325 \cdot 3.0 \cdot 10^{-3}}{300} = 1.01325$$

(a)

$$\Delta U = \frac{3}{2}Nk\Delta T = \frac{3}{2} \cdot 1.01325 \cdot (1000 - 300) = 1.064 \text{ kJ}$$

SVAR: $\Delta U = 1.1$ kJ

(b)

$$H = U + PV = U + NkT = \frac{5}{2}NkT$$

ger

$$\Delta H = \frac{5}{2}Nk\Delta T = \frac{5}{2} \cdot 1.01325 \cdot (1000 - 300) = 1.773 \text{ kJ}$$

SVAR: $\Delta H = 1.8$ kJ

(c) För att kunna beräkna entropiändringen antas en reversibel process så att $dQ = TdS$. Första lagen $dU = dQ - PdV$ ger

$$dH = dU + d(PV) = dU + PdV + VdP = dQ = TdS$$

där $dP = 0$ eftersom processen är isobar. Detta ger

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dH}{T} = \frac{5}{2}Nk \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{5}{2}Nk \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{2} \cdot 1.01325 \cdot \ln \frac{1000}{300} = 3.050 \text{ J/K}$$

Samma svar fås även för irreversibla processer eftersom entropin är en tillståndsfunktion. Antagandet om reversibilitet behövs bara för att kunna beräkna entropiändringen men påverkar inte resultatet. Skillnaden är att i en irreversibel process är $dQ < TdS$ så att en mindre värmeöverföring sker än i det reversibla fallet. Entropiändringen är samma.

SVAR: $\Delta S = 3.0$ J/K

5. Ett värmeelement består av en cylinder med diameter 3.0 cm och längd 0.50 m. Värmelementet är nedsänkt i vatten som passerar i rät vinkel mot cylinderaxeln (se figuren). Vatten med temperaturen 25.0 °C passerar förbi värmeelementet med hastigheten 1.0 m/s. Vid effekten 30.0 W blir värmeelementets yttemperatur 60.0 °C. Beräkna värmeöverföringskoefficienten. Vad är betydelsen av vattnets hastighet för processen?

Värmeöverföring:

$$\Phi = \alpha A \Delta T$$

Värmarens area:

$$A = \pi d L$$

Lös ut α :

$$\alpha = \frac{\Phi}{A \Delta T} = \frac{30}{\pi \cdot 0.030 \cdot 0.50 \cdot (60 - 25)} = 18.2 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Om även ändytorna tas med i arean fås samma svar inom given noggrannhet: 17.7 W/m² K.

SVAR: 18 W/m² K

Vattnets hastighet har följande betydelse. Vid höga hastigheter, tex 1 m/s, fås tvingad konvektion. Vid $v = 0$ fås i stället naturlig konvektion. För små hastigheter fås en blandning av tvingad och naturlig konvektion.

6. En eldkolv består av en glascylinder och en kolv med gummitätning. Kolven trycks snabbt in i cylindern varpå en bit bomull i cylindern antänds. Antändningstemperaturen för bomull är ca 400 °C. Med vilken faktor behöver luften i cylindern komprimeras för att antändningstemperaturen ska uppnås om rumstemperaturen är 20 °C?

Antag en adiabatisk process utan luftläckage. Då blir

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

Luft är mestadels diatomärt: $\gamma = 7/5$. Detta ger kompressionsfaktorn

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{273 + 400}{273 + 20} \right)^{1/(7/5-1)} = 8.0$$

SVAR Kompressionsfaktor 8.0 (även $1/8.0 = 0.125$ accepteras)

I verkliga experiment behöver kolven slås ner med stor kraft för att trycket inte ska hinna utjämnas pga läckage.

7. En byggnad med inomhustemperaturen T värms upp av en ideal värmepump med effekten $\Delta W/\Delta t$ där Δt är tiden för en cykel. Värmeffödet ut ur byggnaden är $K(T - T_0)$ där K är en konstant och T_0 är utomhustemperaturen. Bestäm ett uttryck för temperaturen T vid steady state.

Eftersom pumpen är ideal har den Carnotverkningsgraden:

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_1} = \frac{T - T_0}{T} \Rightarrow \Delta Q_1 = \Delta W \frac{T}{T - T_0}$$

där ΔQ_1 är tillförd värme till byggnaden per cykel. Per tidsenhet blir

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \frac{T}{T - T_0}$$

Vid steady state ska samma värme ΔQ_1 bortföras ur byggnaden under varje cykel. Värmeffödet ur byggnaden blir

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = K(T - T_0)$$

Detta ger

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} \frac{T}{T - T_0} = K(T - T_0)$$

Lös ut T :

$$(T - T_0)^2 = \frac{T}{K} \frac{\Delta W}{\Delta t} = AT$$

$$T^2 - T(2T_0 + A) + T_0^2 = 0$$

$$T = T_0 + \frac{A}{2} + \sqrt{(T_0 + A/2)^2 - T_0^2} = T_0 + \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 4T_0A}$$

$$T = T_0 + \frac{1}{2K} \left(\frac{\Delta W}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2K} \sqrt{\left(\frac{\Delta W}{\Delta t} \right)^2 + 4KT_0 \left(\frac{\Delta W}{\Delta t} \right)}$$

Lösningen med minustecken $T = (\dots) - \sqrt{\dots}$ ger $T < T_0$ och utesluts.

SVAR:

$$T = T_0 + \frac{1}{2K} \left(\frac{\Delta W}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2K} \sqrt{\left(\frac{\Delta W}{\Delta t} \right)^2 + 4KT_0 \left(\frac{\Delta W}{\Delta t} \right)}$$

8. Ett antal Carnotmaskiner är hopkopplade. Maskin 1 absorberar värme ΔQ_1 från reservoir 1 som har temperatur T_1 och avger värme ΔQ_2 till reservoir 2 med temperatur T_2 . Maskin 2 absorberar värmen ΔQ_2 från reservoir 2 och avger värmen ΔQ_3 till reservoir 3 som har temperaturen T_3 , osv. Maskin $n = 1, 2, 3, \dots$ absorberar värmen ΔQ_n vid T_n och avger värmen ΔQ_{n+1} vid T_{n+1} . Antag att maskin n levererar en konstant faktor r av arbetet hos maskin $n - 1$: $\Delta W_n / \Delta W_{n-1} = r$. Beräkna temperaturskillnaden $T_n - T_{n+1}$ uttryckt i T_1, T_2, r och n .

För Carnotmaskiner gäller

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} = \frac{\Delta Q_2}{T_2} = \dots = \frac{\Delta Q_n}{T_n}$$

För den första maskinen fås

$$\eta_1 = \frac{|\Delta W_1|}{\Delta Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow |\Delta W_1| = (T_1 - T_2)\Delta Q_1 / T_1$$

och för maskin n är pss

$$|\Delta W_n| = (T_n - T_{n+1})\Delta Q_n / T_n$$

För maskin n blir

$$\Delta W_n = r\Delta W_{n-1} = r^2\Delta W_{n-2} = \dots = r^{n-1}\Delta W_1$$

Detta ger

$$(T_n - T_{n+1}) \underbrace{\Delta Q_n / T_n}_{=\Delta Q_1 / T_1} = r^{n-1}(T_1 - T_2)\Delta Q_1 / T_1$$

Detta ger direkt det sökta sambandet.

SVAR:

$$T_n - T_{n+1} = r^{n-1}(T_1 - T_2)$$