

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122

Torsdag 2023-10-26 kl 08:00-13:00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga

Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag

Fullständiga lösningar ska ges på samtliga problem

OBS: skriv endast på inlämningssidornas framsidor

Hjälpmedel

Miniräknare, linjal

Examinator

Mats Wallin tel 073 765 2000

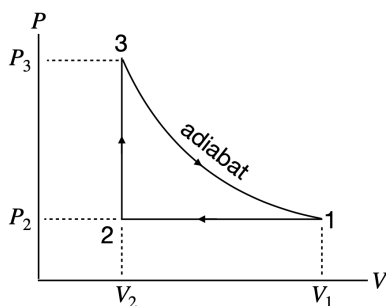
1. I ett hus har en yttervägg arean 10.0 m^2 och värmeledningsförmågan $\lambda = 0.5 \text{ W/m}\cdot\text{K}$. Temperaturen på väggens innersida är $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$ och på yttersidan $0.0 \text{ }^\circ\text{C}$. Hur tjock är väggen om värmen som leds genom väggen är 40 MJ på ett dygn?

2. Bestäm höjden h på en byggnad om lufttrycket vid marken är 1.000 atm och på taket 0.967 atm . Tryckets variation med höjden h ges av $dP/dh = -\rho g$ där $\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$ är densiteten hos luft och g är tyngdaccelerationen.

3. Bensin består av oktan som har den kemiska formeln C_8H_{18} . Hur många kilo koldioxid CO_2 produceras per år av en bil som förbrukar 1000 liter bensin per år? Bensin har densitet 0.75 kg/liter .

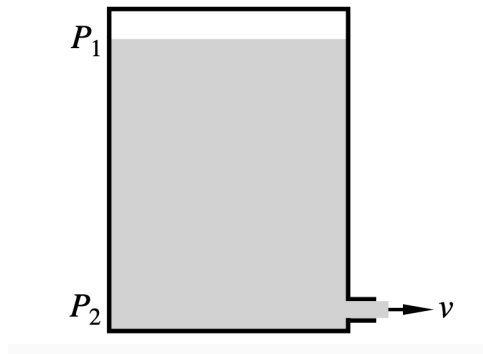
4. 50 kg kött med temperatur $6 \text{ }^\circ\text{C}$ ska frysas till $-18 \text{ }^\circ\text{C}$. Köttets frystemperatur är $-2.8 \text{ }^\circ\text{C}$ och latent värmen är 247 kJ/kg . Värmekapaciteten $3.32 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ ovanför frystemperaturen och $1.77 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ under frystemperaturen. Beräkna hur mycket värme som måste bortföras samt hur lång tid infrysningen tar om fryseffekten är 100 W .

5. En kretsprocess i en ideal gas visas i figuren nedan. Bestäm verkningsgraden η som funktion av kvoterna V_1/V_2 och P_3/P_2 .



VÄND!

6. En behållare innehåller en vätska med densitet ρ som rinner ut med hastigheten v genom ett litet cirkulärt hål med radie r i behållaren på grund av skillnaden mellan trycket P_1 vid den övre vätskeytan och P_2 vid hålet. Använd dimensionsanalys för att bestämma ett uttryck för hastigheten v . Se figuren.



7. (a) En ideal gas i en behållare med konstant volym V genomgår en reversibel process där tryck och temperatur ändras från (P_1, T_1) till (P_2, T_2) . Använd entalpiändringen dH för att bestämma ett uttryck för ändringen i entropi hos systemet.

(b) En behållare innehåller två delvolymen som separeras av en vägg. Den ena delvolymen innehåller 1.00 mol O_2 och den andra delvolymen innehåller 2.00 mol N_2 . Båda gaserna har samma temperaturen 386 K och tryck 1.00 atm. Väggen tas plötsligt bort och gaserna blandas. Bestäm entropiändringen när jämvikt inställt sig.

8. (a) Visa att

$$dU = C_V dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV$$

Utgå från differentialen av entropin $S(T, V)$ och Maxwellrelationen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

(b) Beräkna ΔU för Van der Waals-gasen om tillståndet ändras från (T_1, V_1) till (T_2, V_2) . Antag att $C_V = C_1 + C_2 T$ där C_1, C_2 är konstanter.

LYCKA TILL!

LÖSNINGAR

1. I ett hus har en yttervägg arean 10.0 m^2 och värmeledningsförmågan $\lambda = 0.5 \text{ W/m}\cdot\text{K}$. Temperaturen på väggens innersida är $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$ och på yttersidan $0.0 \text{ }^\circ\text{C}$. Hur tjock är väggen om värmen som leds genom väggen är 40 MJ på ett dygn?

$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x = -\frac{\lambda A \Delta t \Delta T}{\Delta Q} = \frac{0.5 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 20}{40 \cdot 10^6} = 0.216 \text{ m}$$

SVAR: 22 cm

2. Bestäm höjden h på en byggnad om lufttrycket vid marken är 1.000 atm och på taket 0.967 atm . Tryckets variation med höjden h ges av $dP/dh = -\rho g$ där $\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$ är densiteten hos luft och g är tyngdaccelerationen.

Om luftens densitet är konstant dvs inte beror på h så blir

$$\Delta P = -\rho g h$$

där $h = 0$ vid marknivå. Detta ger byggnadens höjd

$$h = -\frac{\Delta P}{\rho g} = -\frac{(0.967 - 1.000) \cdot 101325 \text{ Pa}}{1.20 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = 284 \text{ m}$$

SVAR 284 meter

3. Bensin består av oktan som har den kemiska formeln C_8H_{18} . Hur många kilo koldioxid CO_2 produceras per år av en bil som förbrukar 1000 liter bensin per år? Bensin har densitet 0.75 kg/liter.

Andelen av massan hos C atomer i oktan är

$$\frac{8 \cdot 12}{8 \cdot 12 + 18} = \frac{96}{114} = 0.84$$

Massan av C atomer i en liter bensin:

$$0.75 \cdot \frac{96}{114} = 0.63 \text{ kg}$$

Relativa molekylvikter hos C är 12 och CO_2 är $12 + 2 \cdot 16 = 44$. Massa hos en CO_2 molekyl i förhållande till massan hos en C atom:

$$\frac{44}{12} = 3.67$$

Massa av CO_2 producerad av fullständig förbränning av en liter bensin blir

$$0.75 \cdot \frac{96}{114} \cdot \frac{44}{12} = 2.316 \text{ kg}$$

Förbränning av 1000 liter bensin ger därför ca 2300 kg = 2.3 ton CO_2 . Detta är mer än massan 1.4 ton hos en genomsnittlig bil.

SVAR: 2.3 ton

4. 50 kg kött med temperatur 6 °C ska frysas till -18 °C. Köttets frystemperatur är -2.8 °C och latent värmen är 247 kJ/kg. Värmekapaciteten 3.32 kJ/kg·K ovanför frystemperaturen och 1.77 kJ/kg·K under frystemperaturen. Beräkna hur mycket värme som måste bortföras samt hur lång tid infrysningen tar om fryseffekten är 100 W.

Låt m vara massan, T_1, T_2 start- och sluttemperaturen, c_1, c_2 värmekapaciteterna för $T > T_f$ och $T < T_f$ där T_f är frystemperaturen, samt l vara latent värmen. Den bortförda värmen blir

$$\Delta Q = m \cdot (c_1(T_1 - T_f) + c_2(T_f - T_2) + l) = 1460 + 1345 + 12350 = 15156 \text{ kJ} = 15 \text{ MJ}$$

Antag en ideal kylmaskin med kylfaktorn

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q_2}{\Delta W} = \frac{1}{T_1/T_2 - 1} = 6.7$$

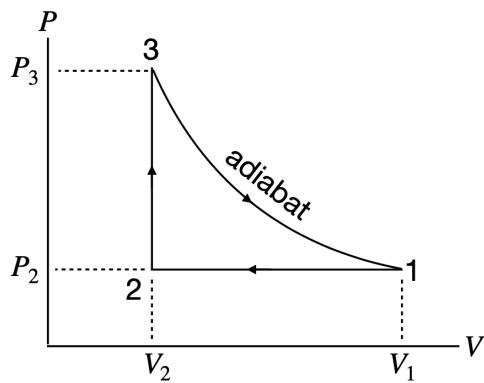
där $T_1 = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$, $T_2 = -18^\circ\text{C} = 255 \text{ K}$. Med arbetet $\Delta W = Pt$ där P är effekten blir tiden t för att bortföra värmemängden $\Delta Q = \varepsilon Pt$

$$t = \frac{\Delta Q}{\varepsilon P} = \frac{15156000}{6.7 \cdot 100} = 22621 \text{ s} = 6 \text{ h}$$

Med en verklig kylmaskin tar det längre tid.

SVAR 15 MJ och 6 timmar.

5. En kretsprocess i en ideal gas visas i figuren nedan. Bestäm verkningsgraden η som funktion av kvoterna V_1/V_2 och P_3/P_2 .



Tillförd värme i 2-3:

$$\Delta Q_1 = C_V(T_3 - T_2)$$

Bortförd värme i 1-2:

$$\Delta Q_2 = C_P(T_1 - T_2)$$

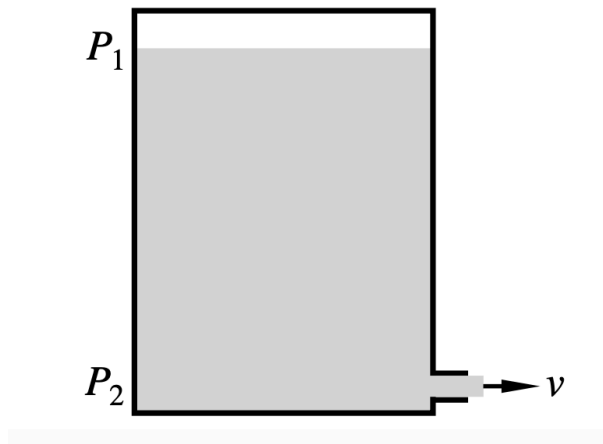
Verkningsgraden blir

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} = 1 - \frac{C_P T_1 - T_2}{C_V T_3 - T_2} = 1 - \gamma \frac{Nk(T_1 - T_2)}{Nk(T_3 - T_2)} \\ &= 1 - \gamma \frac{P_2(V_1 - V_2)}{(P_3 - P_2)V_2} = 1 - \gamma \frac{(V_1/V_2) - 1}{(P_3/P_2) - 1} \end{aligned}$$

SVAR:

$$\eta = 1 - \gamma \frac{(V_1/V_2) - 1}{(P_3/P_2) - 1}$$

6. En behållare innehåller en vätska med densitet ρ som rinner ut med hastigheten v genom ett litet cirkulärt hål med radie r i behållaren på grund av skillnaden mellan trycket P_1 vid den övre vätskeytan och P_2 vid hålet. Använd dimensionsanalys för att bestämma ett uttryck för hastigheten v . Se figuren.



Hastigheten v beror på tryckskillnaden

$$\Delta P = P_2 - P_1$$

så att hastigheten blir $v = 0$ för $P_1 = P_2$. Ansats:

$$v = kr^x(\Delta P)^y\rho^z$$

där k är en dimensionslös konstant. Dimensioner:

$$[v] = \frac{L}{T}, [k] = 1, [r] = L, [P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{ML/T^2}{L^2} = \frac{M}{LT^2}, [\rho] = \frac{M}{L^3}$$

Detta ger

$$\frac{L}{T} = L^x \left(\frac{M}{LT^2} \right)^y \left(\frac{M}{L^3} \right)^z = M^{y+z} L^{x-y-3z} T^{-2y}$$

Identifiera exponenterna:

$$T : 1 = 2y \Rightarrow y = 1/2$$

$$M : 0 = y + z \Rightarrow z = -y = -1/2$$

$$L : 1 = x - y - 3z \Rightarrow x = 1 + y + 3z = 0$$

dvs hastigheten är oberoende av hålets radie.

SVAR: $v = k\sqrt{\Delta P/\rho}$ där k är en dimensionslös konstant.

7. (a) En ideal gas i en behållare med konstant volym V genomgår en reversibel process där tryck och temperatur ändras från (P_1, T_1) till (P_2, T_2) . Använd entalpiändringen dH för att bestämma ett uttryck för ändringen i entropi hos systemet.

(b) En behållare innehåller två delvolymen som separeras av en vägg. Den ena delvolymen innehåller 1.00 mol O_2 och den andra delvolymen innehåller 2.00 mol N_2 . Båda gaserna har samma temperaturen 386 K och tryck 1.00 atm. Väggen tas plötsligt bort och gaserna blandas. Bestäm entropiändringen när jämvikt inställt sig.

(a) Entalpiändringen är

$$dH = C_P dT = T dS + V dP$$

Detta ger

$$dS = \frac{C_P}{T} dT - \frac{V}{T} dP = \frac{C_P}{T} dT - nR \frac{dP}{P}$$

Integrera och utnyttja att C_P är konstant för ideal gas:

$$\Delta S = C_P \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} - nR \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = C_P \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{P_2}{P_1}$$

(b) Lösningssmetod 1: Bestäm entropiändringen genom att byta den fria expansionen mot den kvasistatiska processen i (a). Entropiändringen blir samma eftersom S är en tillståndsfunktion. Temperaturen ändras inte vid blandningen: $T_2 = T_1 = T$. Volymerna innan blandning ges av

$$V_{O_2} = \frac{RT}{P}, \quad V_{N_2} = \frac{2RT}{P}$$

Efter blandning blir volymen summan av dessa:

$$V = \frac{RT}{P} + \frac{2RT}{P} = \frac{3RT}{P}$$

Sluttrycket för gaserna dvs partialtrycken ges av att $PV = nRT$ är samma före och efter blandningen:

$$P_{O_2} = P \frac{V_{O_2}}{V} = \frac{1}{3}P, \quad P_{N_2} = P \frac{V_{N_2}}{V} = \frac{2}{3}P$$

Det totala trycket är summan av partialtrycken: $P_{O_2} + P_{N_2} = P$ dvs samma som trycket innan blandningen. Entropiändringen fås med formeln från (a):

$$\Delta S = \Delta S_{O_2} + \Delta S_{N_2} = -R \ln \frac{1}{3} - 2R \ln \frac{2}{3} = 15.9 \text{ J/K}$$

Notera att svaret inte beror på temperaturen.

(b) Lösningssmetod 2: Byt den fria expansionen mot kvasistatiska isoterma processer med

$$0 = dU = T dS - P dV \Rightarrow dS = \frac{P}{T} dV = \frac{nR}{V} dV$$

Entropiändringen fås genom att integrera från startvolymerna till slutvolymen som bestämdes ovan:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_{O_2} + \Delta S_{N_2} = R \int_{V_{O_2}}^V \frac{dV}{V} + 2R \int_{V_{N_2}}^V \frac{dV}{V} \\ &= R \ln V/V_{O_2} + 2R \ln V/V_{N_2} = R \ln 3 + 2R \ln 3/2 = 15.9 \text{ J/K} \end{aligned}$$

(b) Lösningssmetod 3: Räkna med den mikroskopiska definitionen av entropi. $S = k \ln \Omega$ och $\Omega = \text{konstant} \cdot V^N$ vilket ger $S = Nk \ln V + \text{konstant} = nR \ln V + \text{konstant}$. Entropiändringen blir därför

$$\begin{aligned}\Delta S &= \Delta S_{O_2} + \Delta S_{N_2} = R(\ln V - \ln V_{O_2}) + 2R(\ln V - \ln V_{N_2}) \\ &= R \ln V/V_{O_2} + 2R \ln V/V_{N_2} = R \ln 3 + 2R \ln 3/2 = 15.9 \text{ J/K}\end{aligned}$$

SVAR: (a) $\Delta S = C_P \ln \frac{T_2}{T_1} - Nk \ln \frac{P_2}{P_1}$ eller $\Delta S = C_P \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{P_2}{P_1}$

(b) $\Delta S = 15.9 \text{ J/K}$

8. (a) Visa att

$$dU = C_V dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV$$

Utgå från differentialen av entropin $S(T, V)$ och Maxwellrelationen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

(b) Beräkna ΔU för Van der Waals-gasen om tillståndet ändras från (T_1, V_1) till (T_2, V_2) .
Antag att $C_V = C_1 + C_2 T$ där C_1, C_2 är konstanter.

(a) Första lagen

$$dU = T dS - P dV$$

och differentialen av entropin

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV$$

ger

$$dU = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - P \right] dV$$

Skriv om med hjälp av

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$$

och

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

Detta ger

$$dU = C_V dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV$$

(b) För VdW-gasen med

$$P = \frac{NkT}{V - Nb} - a \left(\frac{N}{V} \right)^2$$

fås

$$T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P = a \left(\frac{N}{V} \right)^2$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_1^2 dU = \int_{T_1}^{T_2} (C_1 + C_2 T) dT + aN^2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} \\ &= C_1(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}C_2(T_2^2 - T_1^2) + aN^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \\ &= C_1(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}C_2(T_2^2 - T_1^2) + a \frac{N^2}{V_1 V_2} (V_2 - V_1) \end{aligned}$$

SVAR:

$$\Delta U = C_1(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}C_2(T_2^2 - T_1^2) + a \frac{N^2}{V_1 V_2} (V_2 - V_1)$$